Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Mathecamp 2020

Komplexe Zahlen

Aufgabe 1. *reelle Lösungen finden*

Bestimme die Lösungsmengen der Gleichungen mit einer Methode deiner Wahl (zum Beispiel Quadratischem Ergänzen oder der Mitternachtsformel):

a) $x^2 = 0$

b) $x^2 - 1 = 0$

c) $x^2 - 4x + 4 = 0$

d) $x^2 - 3x + 5 = 0$

e) $x^2 + 1 = 0$

f) $x^2 - 5x + 4 = 0$

g) $ax^2 + bx + c = 0$ für reelle Zahlen $a,\ b$ und c

Wir tun jetzt einfach so als gäbe es eine Lösung einer der im reellen Zahlenbereich nicht lösbaren Gleichungen, erweitern damit die reellen Zahlen und denken uns einen hübschen Namen dafür aus. Der Einfachheit halber nehmen wir dafür die Lösung der Gleichung aus Aufgabe 1 e) und nennen sie i (kurz für *imaginäre Einheit*).

Aufgabe 2.

Mache dir kurz klar, dass die Lösung der Gleichung aus Aufgabe 1 e) tatsächlich $i^2 = -1$ erfüllt.

Zahlen der Form $x + iy$ nennen wir *komplexe Zahlen*, $x \in \mathbb{R}$ heißt der *Realteil* und $y \in \mathbb{R}$ der *Imaginärteil* der komplexen Zahl. Die Menge aller dieser Zahlen kürzen wir mit $\mathbb{C}$ ab. Die Zahlen $w \in \mathbb{C}$, für die $Im(w) = 0$ gilt, sind genau die reellen Zahlen. [1] Wenn $Re(w) = 0$ ist, heißt w *imaginär*.
Wir können immer noch addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren. Alles, was wir dabei im Hinterkopf behalten müssen, ist die Gleichung $i^2 = -1$.

[1] Mach dir das an dieser Stelle gerne einmal kurz klar, dass wir tatsächlich dadurch alle reellen Zahlen erzeugen können.

Aufgabe 3. *Rechenregeln Addition und Multiplikation*

Rechne nach, dass die folgenden Regeln für die Addition und die Multiplikation gelten, wenn $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

a) $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$

b) $(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

Aufgabe 4. *Rechenregel Division*

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dann gilt:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

Bonusaufgabe: Zeige diese Gleichung, indem du den Nenner der linken Seite durch Multiplikation auf die rechte Seite bringst und diese dann vereinfachst, bis (hoffentlich) $a + ib$ rauskommt.

Aufgabe 5. *Rechnen mit komplexen Zahlen*

Berechne die folgenden Beispiele und versuche, die Ergebnisse so gut es geht wieder als komplexe Zahlen der Form $x + iy$ zu vereinfachen:

a) $(1 + i) + (1 - i)$

b) $(3 + 2i) - (4 - 9i)$

c) $(a + bi) - (c + di)$, wobei $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

d) $(1 + i)(1 - i)$

e) i^{2417}

f) $(3 + 2i)/(4 - 9i)$

Man kann die komplexen Zahlen auch als Vektoren im zweidimensionalen auffassen. Aus der Zahl $x + iy$ wird dabei der Vektor (x, y). (Übrigens: mit Vektor ist einfach nur die Verbindungslinie zwischen dem Nullpunkt und dem Koordinatenpunk (x, y) gemeint.)

Aufgabe 6.

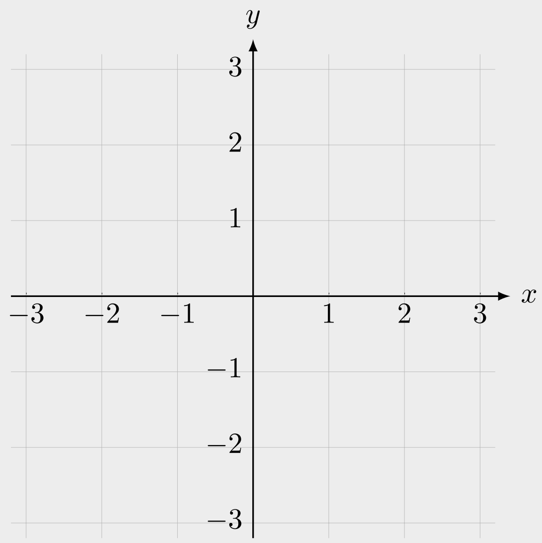
Zeichen die folgenden komplexen Zahlen in das Koordinatensystem ein:

a) $-3+i$

b) $-3-i$

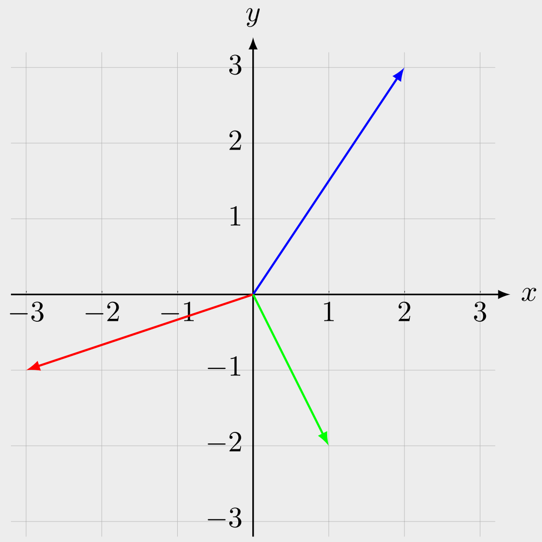
c) $3+2i$

d) $-2-3i$



Aufgabe 7.

Schreibe zu den in folgendem Koordinatensystem eingezeichneten Vektoren die zugehörige komplexe Zahl auf.



Aufgabe 8.

Was bedeuten Addition und Subtraktion von komplexen Zahlen geometrisch? Überlege anhand einer Zeichnung und verwende beispielsweise die beiden Zahlen $2 + i$ und $1 + 2i$.

Aufgabe 9.

Wie wirkt sich die Multiplikation einer komplexen Zahl mit einer reellen Zahl auf den entsprechenden Vektor aus? Teste dies zeichnerisch beispielsweise mit der komplexen Zahl $2 + 2i$ und multipliziere jeweils mit -1, 2 und 0.5.

Die Idee mit den Vektoren ermöglicht uns außerdem, den Betrag einer komplexen Zahl $x + iy$ zu bestimmen. Der Betrag einer komplexen Zahl entspricht der Länge des Vektors, der sich ergibt, wenn man eben diese Zahl als Vektor im zweidimensionalen interpretiert.

Aufgabe 10. *Betrag einer komplexen Zahl bestimmen*

Überlege dir (z.B. anhand einer Zeichnung), dass für den Betrag einer komplexen Zahl folgende Formel gilt:

$$|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Damit können wir jetzt konkret den Betrag von komplexen Zahlen berechnen und allgemeine Aussagen über den Betrag treffen.

Aufgabe 11.

Berechne die Beträge der folgenden Zahlen:

a) $1+i$

b) $1-i$

c) $3+2i$

d) $(3+2i)(4-9i)$

e) $(1+i)/(1-i)$

Aufgabe 12. *Bonusaufgabe: Eigenschaften Betrag*

Zeige die folgenden Eigenschaften des komplexen Betrages:

a) Sei z eine komplexe Zahl. Dann gilt: $|z| \geq 0$.

b) Ist $|z| = 0$, so folgt $z = 0$.

c) Für komplexe Zahlen w, z gilt: $|w \cdot v| = |w| \cdot |v|$.

d) Sei z eine komplexe Zahl. Dann gelten:
   i) $|Re(z)| \leq |z|$
   ii) $|Im(z)| \leq |z|$,

   wobei $Re(z)$ den Realteil und $Im(z)$ den Imaginärteil von z bezeichnet.

e) Für zwei komplexe Zahlen $w, z \in$ gilt: $|w+z| \leq |w| + |z|$

f) Überlege dir anhand eines Beispiels, wieso für zwei komplexe Zahlen $w, z \in \mathbb{C}$ im Allgemeinen gilt: $|w+z| \neq |w| + |z|$.

Nachdem wir uns mit der Länge der Vektoren beziehungsweise dem Betrag der komplexen Zahlen beschäftigt haben, schauen wir uns noch den jeweiligen Winkel an. [2]
Als nächstes wollen wir uns überlegen, wie wir durch Multiplikation oder Addition mit komplexen Zahlen den Winkel beeinflussen können.

[2]Ein Vektor ist eindeutig durch den Winkel zur x-Achse und seine Länge bestimmt. Überlege dir gerne kurz, dass das tatsächlich gilt.

Aufgabe 13.

Überlege dir, wie du durch Multiplikation mit einer anderen komplexen Zahl den Winkel auf die folgenden Arten verändern kannst:

a) am Ursprung (Nullpunkt) spiegeln.

b) um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn drehen.

c) um $45°$ im Uhrzeigersinn drehen.

Hinweis: diese Teilaufgabe ist etwas kniffliger, als sie auf den ersten Blick aussieht. Pass auf, dass du nicht aus Versehen die Länge des Vektors änderst, sondern tatsächlich nur den Winkel.

Als nächstes kann man sich noch überlegen, ob man die Vektoren auch an einer der Achsen im Koordinatensystem spiegeln kann.
Schau dir nochmal die Vektoren aus Aufgabe 11 a) und b) an. Was fällt dir auf?
Das führt uns zu folgendem Konzept: die *komplexe Konjugation.* Man bestimmt diese für eine beliebige komplexe Zahl $w = x + iy \in \mathbb{C}$ folgendermaßen: $\bar{w} = x - iy$. Überlege dir an dieser Stelle, dass komplex Konjugieren wirklich einer Spiegelung an der x-Achse entspricht.

Aufgabe 14. *Eigenschaften komplexe Konjugation*

Zeige die folgenden Eigenschaften der komplexen Konjugation:

a) Sei w eine komplexe Zahl. Dann gilt: $\bar{\bar{w}} = w$

b) Für komplexe Zahlen w, z gilt: $\overline{w + z} = \bar{w} + \bar{z}$

c) Für komplexe Zahlen w, z gilt: $\overline{w \cdot z} = \bar{w} \cdot \bar{z}$

d) Für eine komplexe Zahl w gilt:
   i) $Re(w) = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$ und
   ii) $Im(w) = \frac{1}{2}(w - \bar{w})$,

   wobei $Re(w)$ den Realteil und $Im(w)$ den Imaginärteil der komplexen Zahl bezeichnet.

Aufgabe 15.

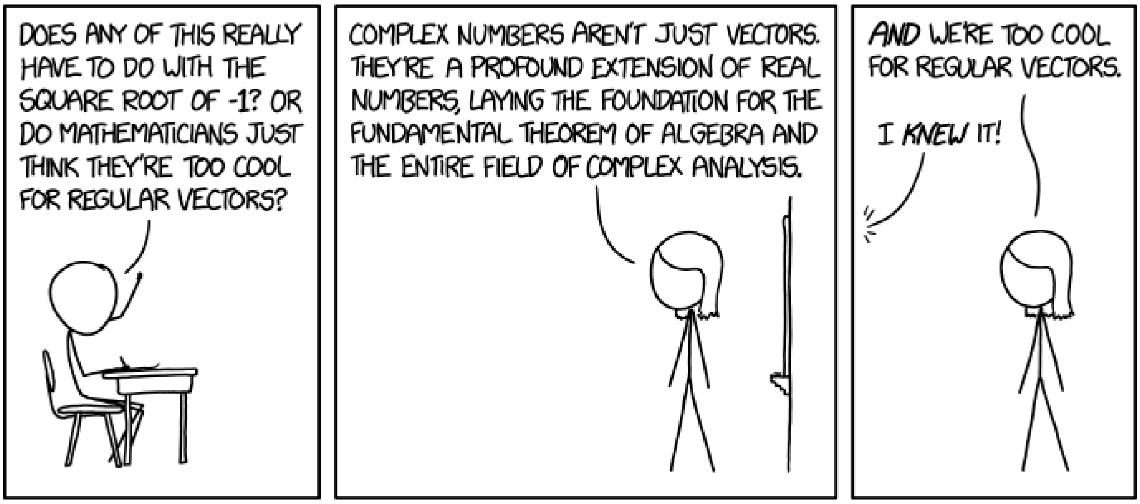
Überlege dir, in welchen Fällen für eine komplexe Zahl z gilt: $z = \bar{z}$.

Aufgabe 16.

Zeige die folgenden Aussagen:

a) Für jede Zahl $w \in \mathbb{C}$ ist $w\bar{w} \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl.

b) Für jede Zahl $w \in \mathbb{C}$ gilt: $|w| = \sqrt{w\bar{w}}$



https://xkcd.com/2028/

Aufgaben für besonders Schnelle/Interessierte:

Aufgabe 17.

Zeige, dass die Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetze weiter gelten. Genauer: Wenn $z = x + iy$, $w = u + iv$ und $c = a + ib$ gegebene komplexe Zahlen sind, dann gilt:

a) $(c + w) + z = c + (w + z)$

b) $(cw)z = c(wz)$

c) $z + w = w + z$

d) $z * w = w * z$

e) $c(w + z) = cw + cz$

Außerdem können wir jetzt für jede reelle Zahl die Wurzel ziehen, auch für negative.

Aufgabe 18. *negative Wurzeln*

Berechne die folgenden Wurzeln:

a) $\sqrt{-4}$

b) $\sqrt{-2}$

c) $\sqrt{-100}$

Verwende dazu, dass $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$.
Überlege dir, warum du mit dieser Formel in den komplexen Zahlen sehr vorsichtig sein solltest.
Berechne dazu, dass gilt:

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1}\sqrt{-1} \neq \sqrt{-1} \tag{2}$$

Aufgabe 19.

Bestimme die Lösungsmengen der Gleichungen in den komplexen Zahlen mit der Methode deiner Wahl (zum Beispiel Quadratischem Ergänzen oder der Mitternachtsformel)

a) $z^2 = 0$

b) $z^2 - 1 = 0$

c) $z^2 - 4z + 4 = 0$

d) $z^2 - 3z + 4 = 0$

e) $z^2 + 1 = 0$

f) $z^2 - 5z + 4 = 0$

g) $az^2 + bz + c = 0$ für reelle Zahlen $a,\ b$ und c

Warum ist die Ungleichung (2) für diese Lösungen kein Problem?