Matheschülerzirkel
Universität Augsburg
Sven Prüfer

Schuljahr 2019/20
Klassenstufe 10

Paradoxa der Wahrscheinlichkeitstheorie

Mathecamp vom 19.08 bis 23.08.2020

Aufgabe 1. *Das Geburtstagsparadoxon***

Wenn N Menschen in einem Raum sind, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie alle an verschiedenen Tagen Geburtstag haben?
Anders formuliert, was ist die kleinste Anzahl an Personen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen darunter am gleichen Tag Geburtstag haben, 50% beträgt?
Paradoxon: Die Anzahl ist viel kleiner als man denken würde!

Aufgabe 2. *Das Ziegenproblem**

Gegeben sei folgende Spielsituation: Der Spieler hat die Wahl zwischen drei Türen. Hinter zweien davon befindet sich nur ein Trostpreis (eine Ziege), hinter der dritten dagegen der Hauptgewinn (ein Auto). Nachdem der Spieler eine Tür gewählt hat, öffnet der Spielleiter eine der anderen Türen, hinter der sich eine Ziege befindet. Nun hat der Spieler die Möglichkeit, bei seiner Tür zu bleiben oder zur anderen noch verschlossenen Tür zu wechseln.
Sollte er wechseln?
Paradoxon: Die Antwort ist etwas unintuitiv.

Aufgabe 3. *Das Julklappproblem****

N Kinder spielen Julklapp oder Wichteln. Dazu bringt jede*r genau ein Geschenk mit und diese werden dann zufällig wieder unter den Kindern verteilt.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass *kein* Kind sein eigenes Geschenk bekommt?
Paradoxon: Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kind sein eigenes Geschenk bekommt, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass dem nicht so ist.

Aufgabe 4. *Simpson-Paradoxon**

Zwei Losverkäufer haben jeweils eine rote und eine schwarze Urne mit Losen. Alle Urnen enthalten Gewinne und Nieten. Es ist bekannt, dass bei beiden Losverkäufern der Anteil der Gewinne in der roten Urne höher ist als in der schwarzen.
In diesem Jahr beschließen die Losverkäufer, gemeinsam Lose zu verkaufen. Dazu werfen sie die beiden roten Urnen zusammen in einen großen roten Bottich und die beiden schwarzen Urnen zusammen in einen großen schwarzen Bottich.
Paradoxon: Es ist möglich, dass der Anteil der Gewinne im schwarzen Bottich größer ist als im roten!

Aufgabe 5. *Die Mädchen-Jungen-Frage**

Nachdem du in ein neues Haus gezogen bist, erfährst du, dass deine Nachbarin zwei Kinder unterschiedlichen Alters hat. Diese können männlich oder weiblich sein.

(a) Du siehst, dass ein Junge im Garten der Nachbarin spielt und weißt, dass dies eines ihrer Kinder sein muss. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Kind auch ein Junge ist?

(b) Jetzt siehst du wieder einen Jungen im Garten der Nachbarin spielen, aber du weißt zusätzlich, dass dieser Junge das ältere Kind ist. Wie hoch ist jetzt die Wahrscheinlichkeit, dass das zweite Kind auch ein Junge ist?

Paradoxon: Die Ergebnisse sind unintuitiv und es ist erstaunlich, dass die zusätzliche Information im zweiten Teil die Wahrscheinlichkeit beeinflusst.

Aufgabe 6. *Taxiproblem***

In einer Großstadt wurde ein Verbrechen begangen. Ein Zeuge sagt, er habe ein weißes Taxi flüchten sehen. Die Polizei weiß, dass Zeugen zu 90% korrekt liegen. In der Stadt gibt es 10 weiße und 190 gelbe Taxis.

(a) Welche Farbe hatte das Taxi wahrscheinlich?

(b) Bei welchen Taxis sollte die Polizei anfangen zu suchen?

Paradoxon: Die Antworten sind unintuitiv und scheinen sich zu widersprechen.

Aufgabe 7. *Das Aufteilungsparadoxon**

Zwei Freunde treffen sich zu einem Wettkampf im Bogenschießen. Wer als erstes sechs Mal die Scheibe trifft, soll das Preisgeld von 100 Euro gewinnen. Beim Stand von 5 : 3 zieht jedoch ein Gewitter auf, und der Wettkampf muss sofort abgebrochen werden. Was wäre nun eine faire Aufteilung des Preisgeldes?
Paradoxon: Das Ergebnis ist sehr anders als man denken würde.

Aufgabe 8. *Das Unabhängigkeitsparadoxon**

Ein Mädchen soll gegen ihre Eltern entweder in der Reihenfolge Mutter–Vater–Mutter oder Vater–Mutter–Vater drei Tennismatches bestreiten. Sie soll dabei zweimal hintereinander gewinnen Die Mutter spielt stärker als der Vater. Soll sie die erste Reihenfolge wählen oder die zweite um ihre Chancen zu erhöhen?
Paradoxon: Das Ergebnis ist etwas überraschend.

Aufgabe 9. *Das Umtauschparadoxon**

Sven macht Anna ein Geschenk: Er hat zwei Briefumschläge vorbereitet. In einem befindet sich ein unbekannter Betrag, im anderen der doppelte Betrag. Anna darf in einen er beiden Umschläge hineinschauen und sich dann entscheiden, welchen von beiden sie nimmt.
Nachdem sie in einem Umschlag den Betrag x sieht, denkt sie sich: „ Mit 50% Wahrscheinlichkeit liegt in dem anderen Umschlag der halbe Betrag $\frac{x}{2}$ und mit 50% Wahrscheinlichkeit der doppelte Betrag $2x$. Wenn ich wechsle, bekomme ich also im Erwartungswert

$$\mathbb{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{5}{4}x,$$

also mehr als x. Ich sollte wohl den anderen Umschlag nehmen.“
Stimmt diese Überlegung?
Paradoxon: Das klingt ganz schön plausibel.

Aufgabe 10. *Halbkreis***

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass drei unabhängig und rein zufällig gewählte Punkte eines Kreises auf einem gemeinsamen Halbkreis liegen?
Paradoxon: Das Ergebnis ist größer als man denkt.

Aufgabe 11. *Das Gladiatorenparadoxon***

Tanja und Kai spielen folgendes Spiel: Beide halten jeweils einen oder zwei Finger hoch. Ist die Gesamtzahl der erhobenen Finger gerade, so zahlt Kai an Tanja, ist sie ungerade, so zahlt Tanja an Kai, und zwar werden jeweils so viele Einheiten gezahlt, wie Finger erhoben wurden.
Ist dieses Spiel gerecht? Würdest du lieber Kai oder Tanja sein?
Paradoxa: Der erste Eindruck täuscht!

Aufgabe 12. *Das Wartezeitenparadoxon****

Die Zwischenabfahrtzeiten der Busse von einer Haltestelle seien unabhängig verteilt mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ.
Wie lange müssen wir dann erwartungsgemäß an der Haltestelle warten bis der nächste Bus kommt?
Ein konkretes Beispiel zum Berechnen: Wenn die Zwischenabfahrtszeiten exponentialverteilt[1]sind mit Erwartungswert zehn Minuten, ergibt sich folgendes. Wenn wir an der Haltestelle ankommen, dann ist der letzte abgefahrene Bus erwartungsgemäß vor zehn Minuten abgefahren, und der nächste kommt etwa in zehn Minuten.
Paradoxon: Obwohl die Abstände zwischen den Bussen typischerweise zehn Minuten sind, müssen wir trotzdem mit zehn Minuten Wartezeit anstelle von fünf Minuten rechnen!.

[1]Eine Exponentialverteilung $P(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für $x \geq 0$ ist eine recht übliche Annahme für solche Probleme. Dabei ist insbesondere der Erwartungswert gleich der Standardabweichung.

Aufgabe 13. *Bertrand-Paradoxon****

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck und dessen Umkreis. Wir wählen rein zufällig eine Sehne des Umkreises. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne länger ist als eine Dreieckseite?
Paradoxon: Es gibt verschiedene, gleichermaßen sinnvolle Antworten.

Aufgabe 14. *„Sleeping beauty problem"****

Einer Frau wird folgendes Spiel erklärt: Am Sonntag wird eine faire Münze geworfen, sie erfährt das Ergebnis aber nicht. Anschließend wird sie in Schlaf versetzt. Hat die Münze „Kopf" gezeigt, wird sie am Montag geweckt. Hat die Münze „Zahl" gezeigt, wird sie ebenfalls am Montag geweckt, anschließend wird sie aber wieder in Schlaf versetzt und ihr Gedächtnis gelöscht. Dann wird sie am Dienstag geweckt.
Direkt nach jedem Aufwachen wird sie gefragt: Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat die Münze „Kopf" gezeigt?
Bemerkung: Die richtige Antwort ist auch unter Mathematikern umstritten.

Aufgabe 15. *Das Zwei-Zettel-Spiel****

Rainer schreibt zwei zufällige, verschiedene Zahlen auf jeweils einen Zettel. Samuel wählt zufällig einen davon aus, und sieht sich die Zahl an. Nun muss sich Samuel entscheiden, ob die gewählte Zahl die größere oder die kleinere von beiden ist.
Gibt es eine Strategie, mit der er mit Wahrscheinlichkeit größer als $\frac{1}{2}$ richtig liegt?
Paradoxon: Es gibt tatsächlich eine Strategie, die besser als $\frac{1}{2}$ ist. Und das macht eigentlich keinen Sinn. Oder doch?