

# Klassifikation endlich-dimensionaler Divisionsalgebren mit Einselement

Maximilian Keßler

4. September 2021

## Zusammenfassung

Bei diesen Notizen handelt es sich um die Ausarbeitung meines gleichnamigen Vortrags, der am 13. Juli 2021 im S1G1-Seminar 'Reelle Divisionsalgebren' an der Universität Bonn unter Leitung von Fabian Hebestreit gehalten wurde. Die Seminarhomepage findet sich unter <http://www.math.uni-bonn.de/people/fhebestr/RDiv2/>

Hauptziel des Vortrags bzw. dieses (kurzen) Artikels ist es, einen Beweis zu skizzieren, wie man alle endlich-dimensionalen, reellen Divisionsalgebren mit Einselement klassifizieren kann.

Hierzu führen wir in die (Ko-)Homologietheorie ein und folgen (grob) der Vorgehensweise von HOPF, MILNORSowie KERVAIRE, wie sie in [al92, Kap. 11] beschrieben ist.

**Warnung.** Diese Fassung ist noch nicht korrigiert, und enthält ziemlich sicher noch Fehler.

## Inhaltsverzeichnis

<b>0 Konventionen, Grundlagen</b>	<b>3</b>
0.1 Handhabung der Umgebungen . . . . .	3
0.2 Begrifflichkeiten . . . . .	3
0.3 Erinnerungen . . . . .	4
<b>1 Motivation</b>	<b>4</b>
1.1 Überblick über die bisherigen Resultate . . . . .	4
1.2 Wohin nun? . . . . .	5
1.3 Überblick über die Hauptresultate . . . . .	6
1.4 Hin zur algebraischen Topologie . . . . .	7
<b>2 Crashkurs: Homologietheorie</b>	<b>9</b>
2.1 Crashkurs: Topologie . . . . .	9
2.2 Mannigfaltigkeiten . . . . .	10
2.3 Simpliziale Homologie . . . . .	12
2.3.1 Was sind Löcher? . . . . .	12
2.3.2 Simplizialkomplexe . . . . .	14
2.3.3 Homologiegruppen . . . . .	17
2.3.4 Pushforward . . . . .	23
2.3.5 Untermannigfaltigkeiten . . . . .	24
2.3.6 Bettizahlen . . . . .	26
2.3.7 Ausblick . . . . .	27
2.4 Der Homologiering . . . . .	27
2.4.1 Der Homologiering von $\mathbb{P}^n$ . . . . .	31
2.5 Kohomologie . . . . .	32
2.5.1 Kohomologiegruppen . . . . .	32
2.5.2 Poincaré-Dualität . . . . .	32
2.5.3 Bettizahlen . . . . .	33
2.5.4 Der Kohomologiering . . . . .	33
2.5.5 Kohomologie von $\mathbb{P}^n$ . . . . .	34
<b>3 Der Satz von Hopf</b>	<b>36</b>
3.1 Überblick . . . . .	36
3.2 Beweise . . . . .	37
<b>4 Reduktion auf <math>n = 1, 2, 4, 8</math></b>	<b>41</b>
4.1 Vektorbündel . . . . .	42
4.1.1 Hopfsche Bündel . . . . .	43
4.2 Stiefel-Whitney-Klassen . . . . .	46
4.3 Klassifikation der Vektorbündel . . . . .	47
<b>Bildquellen</b>	<b>49</b>
<b>Literatur</b>	<b>49</b>

---

## 0 Konventionen, Grundlagen

### 0.1 Handhabung der Umgebungen

Ich mag Farben und Struktur, deswegen gibt es viele Bunte Kästen. Jede Umgebung hat ihre eigen Farbe und sticht so klar hervor. Leider neige ich dazu, das zu übertreiben.

Jegliche Aussagen / Sätze, bei denen wir gänzlich auf einen Beweis verzichten, sind mit einem \* markiert. Alle anderen Sätze werden mehr oder weniger bewiesen - potenziell aber unter Zuhilfenahme diverser \*-Aussagen. Man sollte diese also eher wie Axiome betrachten, auf die wir Dinge zurückführen, und die meistens eher technischer Natur oder 'übliche' Standardresultate der jeweiligen Teilgebiete sind.

### 0.2 Begrifflichkeiten

Wir folgen grundsätzlich dem Buch [al92]. Die Begrifflichkeiten sollen hier der Vollständigkeit halber wiedergegeben werden, sie finden sich vor allem im *Reperitorium*, siehe [al92, S. 151-154].

**Definition 0.1** (Algebra). Eine **Algebra** über  $\mathbb{R}$  ist ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$ , zusammen mit einer Bilinearform  $V \times V \rightarrow V$ , genannt *Multiplikation*, d.h. für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  und  $x, y, z \in V$  gilt:

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz, \quad x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz.$$

**Definition 0.2** (Eigenschaften einer Algebra). Eine reelle Algebra  $\mathcal{A}$  heißt

- **alternativ**, wenn  $x(yz) = (xy)z$  für  $x, y, z \in \mathcal{A}$  mit  $|\{x, y, z\}| \leq 2$ , d.h für alle  $x, y \in \mathcal{A}$  ist

$$x(xy) = x^2y \quad x(yx) = (xy)x \quad xy^2 = (xy)y.$$

- **assoziativ**, wenn  $x(yz) = (xy)z$  für  $x, y, z \in \mathcal{A}$
- **kommutativ**, wenn  $xy = yx$  für  $x, y \in \mathcal{A}$

Ein Element  $e \in \mathcal{A}$  heißt **Einselement**, wenn  $ex = xe = x$  für jedes  $x \in \mathcal{A}$ .

Die **Dimension** der Algebra ist die Dimension von  $\mathcal{A}$  als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum.

**Warnung.** Wir fordern explizit **nicht**, dass eine Algebra eine der obigen Eigenschaften besitzt.

Maßgeblicher Gegenstand des Vortrages ist der Begriff einer *Divisionalgebra*:

**Definition 0.3** (Divisionsalgebra). Eine Algebra  $\mathcal{A} \neq 0$  ist eine Divisionsalgebra, wenn für  $a, b \in \mathcal{A}$  mit  $a \neq 0$  stets die Gleichungen

$$ax = b \quad ya = b \quad (1)$$

eindeutige Lösungen  $x, y \in \mathcal{A}$  besitzen.

Man beachte insbesondere, dass damit nach Konvention die *Nullalgebra* keine Divisionsalgebra ist, auch wenn die Gleichungen (1) trivial erfüllt sind, denn es gibt gar keine Elemente  $a \neq 0$ .

### 0.3 Erinnerungen

Wir erinnern uns an die folgenden Aussagen, die wir im Verlauf des Seminars bereits gesehen haben.

**Lemma 0.4.** Ist  $\mathcal{A}$  eine endlich-dimensionale, reelle Algebra, und  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathcal{A}$ , so ist die Multiplikation  $\mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  stetig bezüglich der von  $\|\cdot\|$  induzierten Topologie auf  $\mathcal{A}$ .

*Beweis.* Siehe [al92, S. 191]. □

**Lemma 0.5.** Jede alternative Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  hat ein Einselement.

*Beweis.* Siehe [al92, S. 186] □

## 1 Motivation

### 1.1 Überblick über die bisherigen Resultate

Im Seminar haben wir die reellen Zahlen  $\mathbb{R}$ , die komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ , die Quaternionen  $\mathbb{H}$  und die Oktonionen  $\mathbb{O}$  als Beispiele von *reellen Divisionsalgebren* kennengelernt. Parallel dazu war es stets ein Hauptziel, diese auch zu klassifizieren, so hatten wir nacheinander erarbeitet

**Satz 1.1** (Hopf, 1940). Jede endlich-dimensionale, reelle, KOMMUTATIVE Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  ist höchstens zweidimensional.

*Beweis.* Siehe [al92, S. 194] □

**Korollar 1.2.** Jede endlich-dimensionale, reelle, kommutative Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  mit EINSELEMENT ist isomorph zu  $\mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$ .

*Beweis.* Siehe [al92, S. 196] □

**Satz 1.3** (Frobenius, 1877). Jede endlich-dimensionale, reelle, ASSOZIATIVE Divisionsalgebra ist isomorph zu  $\mathbb{R}, \mathbb{C}$  oder  $\mathbb{H}$ .

*Beweis.* Siehe [al92, S. 189], wir verwenden hier die leicht abgeschwächte-Version, die 'endlich-dimensional' statt 'quadratisch' fordert, und die Voraussetzung  $\mathcal{A} \neq 0$  fallen lässt, weil eine Divisionsalgebra das per Definition erfüllt □

**Satz 1.4** (Struktursatz, Zorn 1933). Jede endlich-dimensionale, reelle, ALTERNATIVE Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  ist isomorph zu  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  oder  $\mathbb{O}$ .

*Beweis.* Siehe [al92, S. 216]. Auch hier geben wir die leicht abgeschwächte Version mit 'endlich-dimensional' wieder. □

Die Sätze wurden hier in der Reihenfolge wiedergegeben, sodass sie sukzessive mehr Divisionsalgebren umfassen. Man beachte aber, dass es sich bei **Satz 1.3** nicht um eine Verallgemeinerung von **Satz 1.1** handelt, auch wenn die Reihenfolge und die Konsequenzen der Sätze dies vermuten lassen würden. **Satz 1.4** ist hingegen eine Verallgemeinerung von **Satz 1.3**, weil Assoziativität insbesondere Alternativität impliziert.

## 1.2 Wohin nun?

Es liegt auf der Hand, dass man sich nun dafür interessiert, auch die Alternativität fallen zu lassen:

**Frage 1.5.** Was sind alle endlich-dimensionalen, reellen Divisionsalgebren?

Man erhält tatsächlich weitere solcher Algebren:

**Beispiel 1.6.** Seien  $S, T \in GL(\mathbb{C})$  zwei  $\mathbb{R}$ -lineare Automorphismen von  $\mathbb{C}$ . Definiere die Algebra  $\mathbb{C}_{S,T}$  durch  $|\mathbb{C}_{S,T}| := \mathbb{C}$  (als Trägermenge), und der Multiplikation

$$\boxtimes : \begin{cases} \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \longrightarrow \mathcal{A} \\ (w, z) & \longmapsto S(w) \cdot T(z) \end{cases}$$

Da  $S, T$  nach Wahl  $\mathbb{R}$ -linear sind, und die komplexe Multiplikation dies ebenfalls ist, ergibt sich zusammen, dass auch  $\boxtimes$  eine Bilinearform auf  $\mathcal{A}$  ist, also wird  $\mathbb{C}_{S,T}$  durch  $\boxtimes$  zu einer reellen Algebra. Zudem ist

$$a \boxtimes x = b \iff x = x = t^{-1} \left( \frac{b}{s(a)} \right) \quad y \boxtimes a = b \iff y = s^{-1} \left( \frac{b}{t(a)} \right).$$

(die Division bezeichnet hierbei die übliche Division von komplexen Zahlen), also sind die Gleichungen (1) eindeutig lösbar.

Aus den soeben wiederholten Klassifikationssätzen folgt nun, dass  $\mathbb{C}_{S,T}$  nicht alternativ (oder gar assoziativ), und auch nicht kommutativ mit Eins sein kann, außer  $\mathbb{C}_{S,T} \cong \mathbb{C}$ .

Es stellt sich jedoch heraus, dass das Auftreten dieser Algebren maßgeblich darauf beruht, dass diese kein *Einselement* mehr besitzen (man überlegt sich recht einfach, dass  $\mathbb{C}_{S,T}$  genau dann ein Einselement hat, wenn  $S, T = \alpha \cdot \text{id}$ , und in diesem Fall ist  $\mathbb{C}_{S,T} \cong \mathbb{C}$ ).

Wählen wir  $S = T$ , so ist im Übrigen  $\mathbb{C}_{S,T}$  auch kommutativ (und z.B. für  $S = T = \text{komplexe Konjugation}$  nicht isomorph zu  $\mathbb{C}$ ), und erfüllt somit die Anforderungen an [Satz 1.1](#), weswegen die Forderung des Einselements in [Korollar 1.2](#) nicht fallen gelassen werden kann. Gewissermaßen hatten wir das 'Problem' dieser zusätzlichen Sorte an weiteren Divisionsalgebren also auch schon vorher, selbst als wir noch Kommutativität gefordert haben.

An dieser Stelle sei angemerkt, dass [\[Dar10\]](#) beispielsweise beweist, dass die Algebren  $\mathbb{C}_{S,T}$  für  $S, T \in GL(\mathbb{C})$  tatsächlich *alle* reellen Divisionsalgebren der Dimension 2 sind, das übersteigt jedoch unsere Möglichkeiten. Ebenfalls sei erwähnt, dass eine vollständige Klassifikation aller endlich-dimensionalen, reellen Divisionsalgebren auch bis heute nicht bekannt ist (siehe ebenfalls [\[Dar10\]](#), zumindest habe ich auch nichts weiteres gefunden).

Der geneigte Leser fragt sich an dieser Stelle vielleicht, warum wir in [Satz 1.3](#) und [Satz 1.4](#) nicht die Existenz eines Einselements fordern mussten. Dies folgt mit [Lemma 0.5](#) jedoch bereits aus der Alternativität von  $\mathcal{A}$ , die wir fordern.

Wir präzisieren also unsere Frage:

**Frage 1.7.** Was sind alle endlich-dimensionalen, reellen Divisionsalgebren mit *Einselement*?

### 1.3 Überblick über die Hauptresultate

Die erstaunliche Antwort auf diese Frage lieferten 1958 KERVAIRE und MILNOR, indem sie zeigten, dass es hierfür keine weiteren Algebren außer  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  und  $\mathbb{O}$  gibt. Ähnlich wie auch beim Beweis von [Korollar 1.2](#) reduziert man zunächst die Dimension der Divisionsalgebra:

**Satz 1.8** (1-2-4-8 Satz, Kervaire, Milnor, 1958, 1. Variante). Ist  $\mathcal{A}$  eine  $n$ -dimensionale, reelle Divisionsalgebra, so ist  $n = 1, 2, 4, 8$ .

Auch etwas analog zum Satz von Hopf erfordert dieser Beweis jedoch (wesentlich

tiefgreifendere) topologische Methoden, bis heute ist kein rein algebraischer Beweis bekannt. Nun erhalten wir:

**Korollar 1.9.** Ist  $\mathcal{A}$  eine endlich-dimensionale, reelle Divisionsalgebra mit EINSELEMENT, so ist  $\mathcal{A}$  isomorph zu  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  oder  $\mathbb{O}$ .

**Warnung.** Dieses Korollar ist ziemlich sicher falsch und wird noch einmal überarbeitet.

Wir erhalten also als Antwort auf unsere (zweite) Frage keine weiteren Beispiele von reellen Divisionsalgebren, gleichzeitig handelt es sich hierbei um eine direkte Verallgemeinerung von [Satz 1.4](#) (indem wir [Lemma 0.5](#) verwenden).

Man sollte an dieser Stelle anmerken, dass die Formulierung von [Satz 1.8](#) wesentlich spezifischer ist als die allgemeine Version des Resultats, dass wir zu diesem Zeitpunkt jedoch nicht wiedergeben können. Wir werden am Ende kurz darauf zurückkommen.

Bevor der 1-2-4-8 Satz bewiesen wurde, stammte das beste Resultat von HOPF, der seinen Dimensionssatz für kommutative Divisionsalgebren, [Satz 1.1](#), noch im gleichen Jahr verallgemeinern konnte:

**Satz 1.10** (Hopf, 1940, 1. Variante). Jede endlich-dimensionale, reelle Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  hat als Dimension eine Zweier-Potenz.

Gleichzeitig handelt es sich hierbei natürlich um eine schwächere Version von [Satz 1.8](#).

## 1.4 Hin zur algebraischen Topologie

Unser Ziel soll es nun sein, einen Beweis von [Satz 1.10](#) zu skizzieren. Dazu werden wir vor allem Methoden der ALGEBRAISCHEN TOPOLOGIE einführen müssen, der letztendliche Beweis wird sich als vergleichsweise einfach herausstellen.

Dazu geben wir den Satz von Hopf zunächst in einer wesentlich allgemeineren Fassung wieder:

**Satz 1.11** (Hopf, 1940, 2. Variante). Wenn es eine stetige ungerade Abbildung von  $S^{n-1} \times S^{n-1}$  nach  $S^{n-1}$  gibt, dann ist  $n$  eine Potenz von 2.

Bemerkenswert ist hierbei vor Allem, dass es sich um eine rein geometrische Aussage handelt, die in keinsten Weise mehr über Divisionsalgebren redet. Insbesondere wird auch der Beweis von [Satz 1.11](#) vollständig innerhalb der algebraischen Topologie verlaufen, und nicht von Divisionsalgebren Gebrauch machen. Die Verbindung zu Divisionsalgebren folgt erst aus:

**Lemma 1.12.** Ist  $\mathcal{A}$  eine  $n$ -dimensionale Divisionsalgebra, so gibt es eine stetige, ungerade Abbildung

$$g: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}.$$

Eine Abbildung  $f: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  heißt **ungerade**, wenn für  $x, y \in S^{n-1}$  gilt:

$$g(-x, y) = -g(x, y) = g(x, -y).$$

*Beweis.* Zunächst ist  $\mathcal{A} \cong \mathbb{R}^n$  als Vektorraum, direkt nach der Definition von  $\mathcal{A}$ . Das Produkt  $\cdot$  auf  $\mathcal{A}$  überträgt sich nun in natürlicher Weise auf  $\mathbb{R}^n$ . Wir betrachten die euklidische Norm  $\|\cdot\|_2$  auf  $\mathbb{R}^n$ . Nach **Lemma 0.4** ist diese Multiplikation dann stetig<sup>1</sup>, und wir können sie auf  $S^{n-1} \times S^{n-1}$  einschränken, und erhalten

$$\begin{aligned} S^{n-1} \times S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, y) &\longmapsto x \cdot y \end{aligned}$$

Um nun nach  $S^{n-1}$  abzubilden, müssen wir noch normieren. Hierzu stellt man fest, dass wegen  $x, y \in S^{n-1}$  sicherlich  $x, y \neq 0$  und damit  $x \cdot y \neq 0$ . Da jede Divisionsalgebra nullteilerfrei ist<sup>2</sup>, ist somit auch  $x \cdot y \neq 0$ , also  $\|x \cdot y\|_2 \neq 0$ , wir teilen also nicht durch Null. Wir erhalten also unsere Abbildung  $g$  als

$$g: \begin{cases} S^{n-1} \times S^{n-1} &\longrightarrow S^{n-1} \\ (x, y) &\longmapsto \frac{x \cdot y}{\|x \cdot y\|_2} \end{cases}$$

Dass  $g$  ungerade ist, ergibt sich unmittelbar aus der Distributivität der Divisionsalgebra.  $\square$

Man erkennt nun auch, dass **Satz 1.10** unmittelbar aus **Satz 1.11** und **Lemma 1.12** folgt. Des weiteren wollen wir noch einen weiteren Schritt in Richtung algebraischer Topologie gehen:

**Beobachte 1.13.** Da  $\mathbb{P}^{n-1} \cong S^{n-1} / x \sim -x$ , können wir  $S^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  kanonisch projizieren, und erhalten zunächst eine Abbildung  $\tilde{g}: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ . Nun beobachten wir, dass die Eigenschaft, dass  $g$  ungerade ist, genau aussagt, dass

$$\tilde{g}(-x, y) = \tilde{g}(x, y) = \tilde{g}(x, -y).$$

denn  $x, -x$  gehen unter der Projektion auf denselben Punkt in  $\mathbb{P}^{n-1}$ . Insbesondere gilt auf beiden Faktoren  $S^{n-1}$ , dass  $\tilde{g}$  unter Antipodenidentifikation invariant

<sup>1</sup>An dieser Stelle sollt man sich klar machen, dass  $\|\cdot\|_2$  tatsächlich eine Norm ist bezüglich jeder Divisionsalgebrastruktur, die  $\mathbb{R}^n$  tragen kann.

<sup>2</sup>Aus  $\alpha \cdot \beta = 0$  für  $\alpha, \beta \neq 0$  folgt sofort, dass die Gleichung  $\alpha x = 0$  nicht eindeutig lösbar ist, denn jetzt sind  $0 \neq \beta$  zwei Lösungen.

ist. Deswegen faktorisiert  $\tilde{g}$  über  $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$  und induziert eine Abbildung

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{g} & & \\
 & & \curvearrowright & & \\
 S^{n-1} \times S^{n-1} & \xrightarrow{g} & S^{n-1} & \xrightarrow{p} & \mathbb{P}^{n-1} \\
 p \times p \downarrow & & \nearrow G & & \\
 \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} & & & & 
 \end{array}$$

Es wird sich herausstellen, dass die von uns entwickelten Methoden der algebraischen Topologie für die Sphären 'zu triviale' Ergebnisse liefern, und ein Übergang zu den projektiven Räumen  $\mathbb{P}^n$  hilfreich ist, weswegen auch die Betrachtung von  $G$  einen entscheidenden Beweisschritt von [Satz 1.11](#) darstellen wird. Mit diesem Wissen im Hinterkopf werden wir im Folgenden insbesondere auch den projektiven Raum vermehrt als Beispiel und Anwendungsfall heranziehen.

## 2 Crashkurs: Homologietheorie

Zentrales Element, um den Beweis von [Satz 1.11](#) führen zu können ist die HOMOLOGIETHEORIE, ein (bzw. der zentrale Grundbaustein) der algebraischen Topologie. Auch hierzu benötigen wir einige Begrifflichkeiten:

### 2.1 Crashkurs: Topologie

Die grundlegenden Begrifflichkeiten der Topologie seien hier nur der Vollständigkeit halber angegeben, wir werden nicht genauer mit ihnen arbeiten. Für ausführlichere Erläuterungen siehe z.B. die Bücher [\[Jän01\]](#), [\[Mun18\]](#), oder die Vorlesungsnotizen [\[Kas21\]](#).

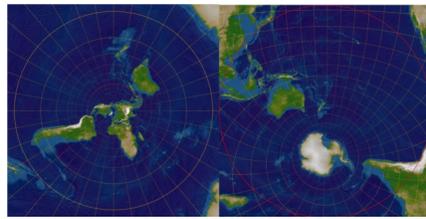
**Definition 2.1** (Topologie). Eine **Topologie** auf einer Menge  $X$  ist eine Menge  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$ , so dass gilt:

- 1)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- 2) Für  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$  ist auch  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$
- 3) Für jede Familie  $\{U_i\}_{i \in I}$  mit  $U_i \in \mathcal{O}$  ist auch  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

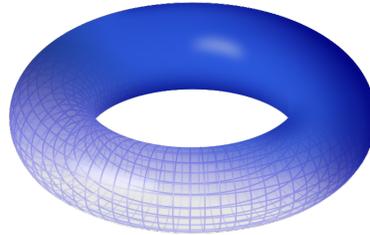
Die Mengen in  $\mathcal{O}$  heißen **offene Mengen**.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  aus einer Menge  $X$  und einer Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ .

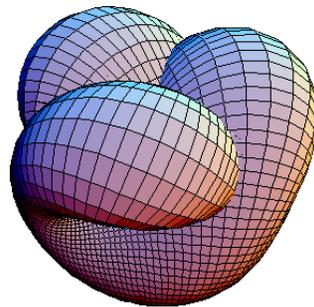
Zur Vorstellung sollte man sich einen topologischen Raum (für uns) im wesentlichen wie einen metrischen Raum vorstellen; jeder metrische Raum ist mit seiner Kollektion an offenen Mengen auch ein topologischer Raum und in der Tat sind alle Räume, die wir behandeln werden, auch metrische Räume.



(a) Die Erde  
Bild von [Rok]



(b) Torus  
Bild von [Leo]



(c)  $\mathbb{P}^2$   
Bild von [Aug]

Abbildung 1: Bekannte Beispiele von Mannigfaltigkeiten

## 2.2 Mannigfaltigkeiten

Für unsere Zwecke werden wir die Homologietheorie nur für *Mannigfaltigkeiten* entwickeln. Mannigfaltigkeiten sind eine spezielle Sorte von topologischen Räumen, die wir 'sehr gut verstehen', die aber immer noch allgemein genug sind, unsere grundlegenden Konzepte formulieren zu können. Zentrales Prinzip ist das Folgende:

**Idee.** Eine Mannigfaltigkeit sieht lokal aus wie  $\mathbb{R}^n$ .

In **Abbildung 1** sind einige bekannte Beispiele von Mannigfaltigkeiten abgebildet:

- Die Erde (genauer: die Oberfläche der Erde) ist eine *zweidimensionale* Mannigfaltigkeit; sie sieht lokal so aus wie ein Ausschnitt der Ebene. Zu sehen sind zwei *Karten*, die die Erde in der Umgebung des Nord- und des Südpols zeigen.
- Auch der Torus ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Man beachte, dass *Torus* stets 'nur' die Oberfläche meint, d.h. der Torus entsteht als  $S^1 \times S^1$ .
- Die *projektive Ebene* ist ebenfalls eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit.

Die zu sehende Abbildung zeigt eine (sich selbst schneidende) Einbettung in den  $\mathbb{R}^3$  (es handelt sich nicht um eine formale Einbettung, wie man sie vielleicht aus der Topologie kennt). Wir interessieren uns weniger für die konkrete Struktur als für den simplen Fakt, dass die projektive Ebene tatsächlich lokal aussieht wie eine Ebene, und somit eine Mannigfaltigkeit ist (und ihren Namen verdient!).

**Definition 2.2** (Mannigfaltigkeit). Eine **Mannigfaltigkeit** der **Dimension**  $n$  ist ein topologischer Raum  $X$ , sodass

1.  $X$  ist Hausdorffsch<sup>3</sup>
2.  $X$  erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom<sup>4</sup>
3.  $X$  ist lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , d.h. es gibt eine offene Umgebung  $x \in U$  und eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , sowie einen Homöomorphismus

$$\varphi: U \xrightarrow{\cong} V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ein paar Bemerkungen sind angebracht:

- Die Hausdorff-Bedingung ist sehr harmlos und eher technisch. Sie wird in all unseren Fällen erfüllt sein. Insbesondere ist jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum.
- Auch das 2. Abzählbarkeitsaxiom wird für uns keine Rolle spielen und stets erfüllt sein.
- Tatsächlich werden Mannigfaltigkeiten in der Literatur sogar manchmal ohne die Forderung an das 2. Auswahlaxiom definieren, es verliert also zusätzlich an Relevanz und ist hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt, wir werden es - wie auch die Hausdorffbedingung - ignorieren.

**Definition 2.3.** Eine Mannigfaltigkeit  $M$  ist **kompakt**, wenn der zu Grunde liegende topologische Raum  $M$  kompakt ist.

**Definition 2.4** (Differenzierbare Mannigfaltigkeit). Ist  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $U \subseteq M$  offen,  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so heißt ein Homöomorphismus

$$\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

<sup>3</sup> $X$  ist Hausdorffsch, wenn für  $x \neq y$  offene, disjunkte Mengen  $x \in U$ ,  $y \in V$  existieren.

<sup>4</sup> $X$  erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn es eine abzählbare Basis der Topologie gibt, d.h. es gibt eine abzählbare Familie  $\{U_i\}_{i \in I}$  offener Mengen, sodass jede offene Menge  $U \subseteq X$  Vereinigung (mancher) der  $U_i$  ist.

eine **Karte**. Eine Kollektion von Karten  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ , sodass  $M = \bigcup_{i \in I} \text{dom}(\varphi_i)$  heißt **Atlas**.

Eine Mannigfaltigkeit, zusammen mit einem Atlas  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  heißt **differenzierbar**, wenn beliebige *Kartenwechsel*, d.h. Abbildungen

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} \big|_{\varphi_j^{-1}(\text{dom}(\varphi_i))} : \varphi_j^{-1}(\text{dom}(\varphi_i)) \rightarrow \text{im}(\varphi_i).$$

unendlich oft differenzierbar ist.

$M$  heißt **glatt**, wenn Kartenwechsel unendlich oft differenzierbar sind.

Man beachte, dass es sich hierbei also nicht um eine Eigenschaft des topologischen Raums selbst, sondern insbesondere auch um eine des (fest) gewählten Atlas handelt.

Wir betrachten ausschließlich kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeiten und werden uns nicht näher mit den Begrifflichkeiten auseinandersetzen. Mit einer Mannigfaltigkeit  $M$  meinen wir also stets eine kompakte Mannigfaltigkeit  $M$ , zusammen mit einem fest gewählten Atlas, sodass  $M$  dadurch eine differenzierbare Struktur trägt. Einige der Sätze, die wir sehen werden, benötigen diese Eigenschaften, sie werden (für uns) stets 'automatisch' erfüllt sein.

## 2.3 Simpliciale Homologie

### 2.3.1 Was sind Löcher?

Die HOMOLOGIETHEORIE verfolgt das Ziel, Mannigfaltigkeiten (allgemeiner: topologischen Räumen) sogenannte HOMOLOGIEGRUPPEN zuzuordnen. Es handelt sich um topologische Invarianten der Räume, die nützlich sind, um diese zu unterscheiden, oder die (Nicht-)Existenz von Abbildungen zwischen diesen zu untersuchen. Grundsätzlich gilt Folgendes:

**Idee.** Wir wollen 'Löcher' in Räumen zählen.

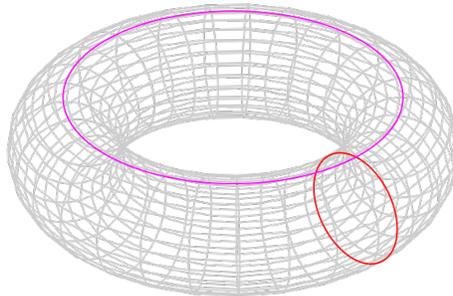


Abbildung 2: Torus mit nichttrivialen Schleifen  
Bild von [Kri]

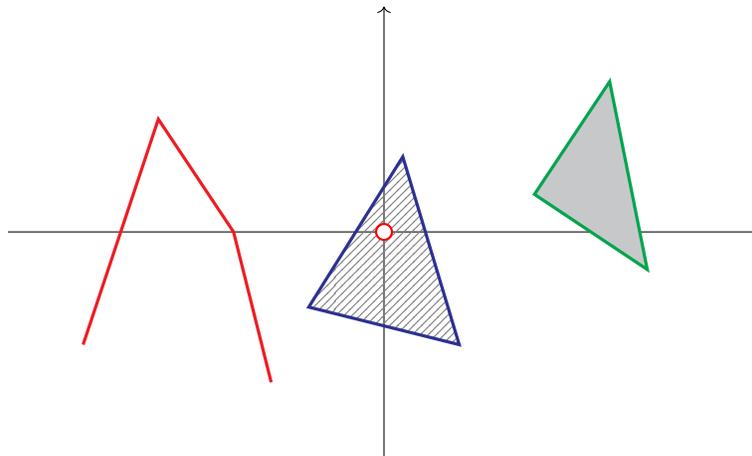


Abbildung 3: Punktierte Ebene mit ausgewählten Simplexes

Intuitiv ist klar, dass in [Abbildung 2](#) die rote und rosa Schleife Löcher im Torus beschreiben, sie 'umrunden' jeweils das Loch im Torus, das wir erhalten, wenn wir diesen entlang der Schleifen entlang aufschneiden.

In der Tat gibt es sogar noch ein wesentlich größeres Loch, nämlich genau das 'Innere' des Torus, das die 'Oberfläche' ja umschließt, und man kann sicherlich argumentieren, dass dieses eine höhere *Dimension* haben sollte als die anderen beiden Löcher.

Es ist jedoch schwerer als gedacht, ein Loch in einem topologischen Raum formal zu beschreiben, denn ein Loch beschreibt ja gerade die *Nicht-Existenz* von etwas. Man benötigt daher 'indirektere' Wege, Löcher in topologischen Räumen beschreiben zu können.

Wir nähern uns der Thematik daher mit einem (vermeintlich) leichteren Beispiel an.

**Beispiel 2.5** (Punktierte Ebene). Betrachte die *punktierte Ebene*  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , zu sehen in [Abbildung 3](#). Auch hier können wir uns intuitiv darauf einigen, dass diese 'im Ursprung' (der aber gar nicht mehr vorhanden ist) ein 'Loch besitzt'.

Betrachte nun den dunkelgrünen, geschlossenen Kantenzug. Unter einem *Kantenzug* verstehen wir ab sofort eine beliebige Menge an Kanten in der Ebene, jede spezifiziert durch ihre beiden Endpunkte. Ein *geschlossener* Kantenzug ist ein Kantenzug, sodass jeder Punkt der Ebene Endpunkt von gerade vielen der Kanten des Kantenzugs ist.

Sprachliche Unsauberkeiten könnten uns schnell dazu verleiten, den grünen

Kantenzug als *Dreieck* zu bezeichnen, wir wollen hier aber bewusst differenzieren. In der Tat bildet der grüne Kantenzug jedoch den *Rand*<sup>5</sup> des grauen Dreiecks<sup>6</sup>. Hier scheint also alles ganz normal.

Betrachtet man nun aber den blauen Kantenzug, so ist auch dieser zunächst geschlossen und 'sieht aus wie der Rand eines Dreiecks', sprachlich unsauber könnten wir auch den blauen Kantenzug als Dreieck bezeichnen.

**Beobachte 2.6.** Der blaue Kantenzug ist *nicht* der Rand eines Dreiecks.

Der zum Scheitern verurteilte Versuch, solch ein Dreieck zu finden, ist in [Abbildung 3](#) schraffiert dargestellt, er scheitert jedoch am fehlenden Ursprung.

Betrachte nun noch den roten Kantenzug. Auch hier stellt man - noch etwas offensichtlicher - fest, dass es sich nicht um den Rand eines Dreiecks handelt. Im Gegensatz zum blauen Kantenzug wundert einen das jedoch nicht, den der rote Kantenzug 'sieht auch gar nicht aus' wie der Rand eines Dreiecks. Das drückt sich darin aus, dass der rote Kantenzug auch gar nicht geschlossen ist.

Wir halten also fest:

**Geschlossene Kantenzüge<sup>7</sup>, die nicht der Rand eines Dreiecks sind, beschreiben Löcher in unserem Raum.**

### 2.3.2 Simplicialkomplexe

Um die eben beobachteten Ergebnisse formalisieren zu können, müssen wir die Begriffe des 'Dreiecks' und der 'Kante' sinnvoll auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Das richtige Konzept hierzu ist das eines *Simplex*, die die einfachsten  $k$ -dimensionalen Objekte darstellen.

**Definition 2.7** (Simplex). Ein  $k$ -**Simplex** in  $\mathbb{R}^n$  ist die konvexe Hülle von  $k + 1$  affin unabhängigen Punkten  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ .

*Affin unabhängig* bedeutet, dass die  $k$  Vektoren  $v_l - v_0$  für  $1 \leq l \leq k$  linear unabhängig sind. Die *konvexe Hülle* beschreibt diejenigen Punkte, die von

<sup>5</sup>Wir gehen an dieser Stelle nicht auf eine formale Definition ein, weil wir diese später sowieso in allgemeinerer Form noch sehen werden

<sup>6</sup>Dreiecke sind für uns stets abgeschlossen

<sup>7</sup>Um genau zu sein, muss der Kantenzug für diese Aussage genau 3 Kanten haben, näheres ebenfalls gleich

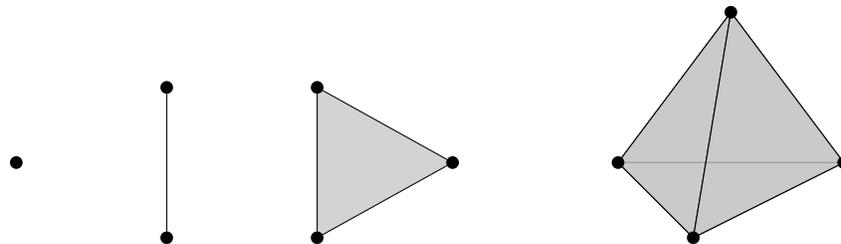


Abbildung 4: Niedrigdimensionale Simplizes

$v_0, \dots, v_k$  'umschlossen' werden, d.h. die Menge

$$S = \left\{ \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_k v_k \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

ist unser Simplex.

Ein  $k$ -Simplex ist natürlich durch seine  $k + 1$  Eckpunkte  $v_0, \dots, v_k$  eindeutig bestimmt, und umgekehrt lassen sich diese  $k + 1$  Eckpunkte aus dem Simplex auch eindeutig wieder rekonstruieren. Wenn nicht weiter spezifiziert, meinen wir stets die konvexe Hülle.

**Nebenbemerkung 2.8.** Im Kontext der Homologietheorie definiert man einen Simplex üblicherweise etwas anders, indem man die *Reihenfolge* der Eckpunkte als weiteres Datum eines Simplex auffasst. Insbesondere lässt sich dann ein Simplex *nicht* aus seiner konvexen Hülle rekonstruieren.

Das benötigt man, um später *Orientierungen* (wird das Dreieck gegen oder im Uhrzeigersinn durchlaufen?) festlegen zu können. Wir werden Orientierung jedoch gänzlich ignorieren, weswegen wir der Reihenfolge der Eckpunkte keine Bedeutung zukommen lassen, um Dinge zu vereinfachen.

**Beispiel 2.9** (Niederdimensionale Simplizes). In [Abbildung 4](#) sind die 4 kleinst-dimensionalen Simplizes abgebildet:

- Ein 0-Simplex ist ein Punkt
- Ein 1-Simplex ist eine Strecke
- Ein 2-Simplex ist ein Dreieck
- Ein 3-Simplex ist ein Tetraeder

Jetzt lässt sich auch leicht präzisieren, was wir mit dem *Rand* eines Simplex meinen:

**Definition 2.10** (Teilsimplex). Sei  $S$  ein  $k$ -Simplex mit Ecken  $v_0, \dots, v_k$ . Ein  $l$ -**Teilsimplex** von  $S$  ist ein  $l$ -Simplex, gebildet aus  $l + 1$  der Ecken  $v_0, \dots, v_k$ .

**Beobachte 2.11.** Ein  $k$ -Simplex hat also  $\binom{k+1}{l+1}$  viele  $l$ -Teilsimplizes.

**Definition 2.12** (Rand). Sei  $S$  ein  $k$ -Simplex. Der **Rand** von  $S$  ist die Menge aller  $k - 1$ -Teilsimplizes von  $S$ .

Um nun auch über mehrere Simplizes, also z.B. über Kantenzüge, wie wir sie in **Beispiel 2.5** gesehen haben, reden zu können, führt man sogenannte *Simplizialkomplexe* ein. Wir folgen hier [Jän01, S. 111].

**Definition 2.13** (Simplizialkomplex). Eine Menge  $K$  von Simplizes in  $\mathbb{R}^n$  heißt **Simplizialkomplex**, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- (i) Enthält  $K$  einen Simplex  $S$ , so auch alle seine Teilsimplizes
- (ii) Der Durchschnitt von zwei Simplizes in  $K$  ist entweder leer, oder ein gemeinsames Teilsimplex.
- (iii)  $K$  ist *lokal endlich*, d.h. jeder Punkt des  $\mathbb{R}^n$  hat eine Umgebung, die nur endlich viele der Simplizes von  $K$  schneidet.

Auch hier sei angemerkt, dass alle Simplizialkomplexe, denen wir begegnen werden, bereits endlich sind, d.h. sie bestehen nur aus endlich vielen Simplizes, weswegen (iii) trivial erfüllt ist, und wir die Bedingung ebenfalls ab sofort ignorieren.

**Beispiel 2.14** (Simplizialkomplexe). Betrachte **Abbildung 5**.

- (a) zeigt keinen Simplizialkomplex, man erkennt leicht, dass Bedingung (ii) verletzt ist.
- (b) zeigt eine Realisierung der 2-Sphäre als Simplizialkomplex. Zwei Dinge sind zu beachten:

Zum abgebildeten Simplizialkomplex gehören - um Bedingung (i) zu erfüllen - notwendigerweise nicht nur die acht 2-Simplizes (Dreiecke), sondern auch die zwölf 1-Simplizes (Kanten) sowie die 0-Simplizes (Punkte) die man erkennen kann.

Mit der Aussage, dass es sich bei dem abgebildeten Simplizialkomplex um die 2-Sphäre handelt, meinen wir, dass die *Vereinigung* der Simplizes in  $K$  (also der acht Dreiecke, 12 Kanten und 8 Punkte)

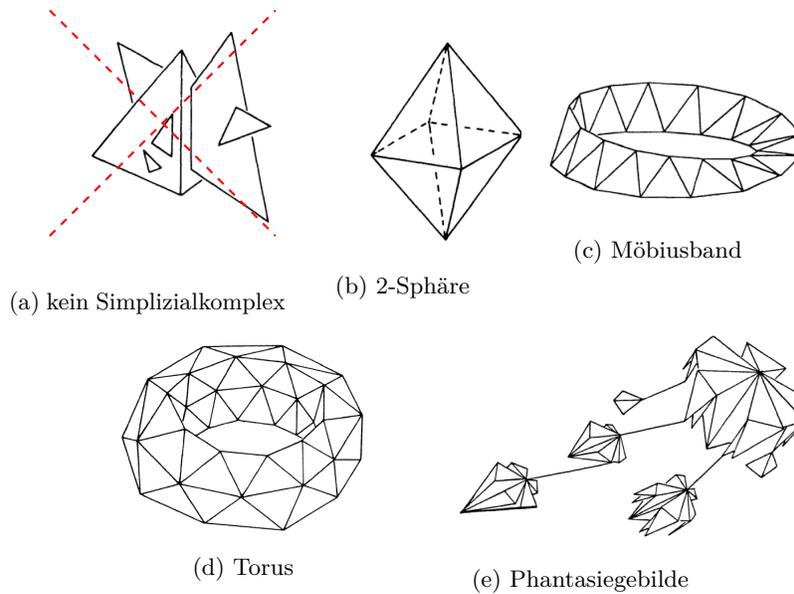


Abbildung 5: Simplicialkomplexe  
Bilder von [Jän01, S. 111f]

homöomorph<sup>8</sup> ist zur 2-Sphäre.

- (c) und (d) zeigen mögliche Simplicialkomplexe, die ein Möbiusband und den Torus darstellen. Auch hier meinen wir wie in (c) dass die entsprechende Vereinigung der Simplizes homöomorph ist zum üblichen Möbiusband bzw. Torus.
- (e) zeigt einen etwas ausgefalleneren Simplicialkomplex, den Jänich als *Phantasiegebilde* bezeichnet. Er erfüllt alle Voraussetzungen an einen Simplicialkomplex, man stellt aber schnell fest, dass er wegen seiner Irregularität nicht homöomorph zu einer Mannigfaltigkeit sein kann, er wird uns also nicht weiter interessieren.

### 2.3.3 Homologiegruppen

Nun können wir unsere bisher nur intuitiven Konzepte von Löchern, gegeben durch geschlossene Kantenzüge, die keine Ränder sind, präzisieren, indem wir uns einen Simplicialkomplex  $K$  vorgeben.

<sup>8</sup>*Homöomorph* ist der korrekte Begriff für 'Gleichheit' von topologischen Räumen.  $X$  und  $Y$  sind homöomorph, wenn es zueinander inverse, stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow X$  gibt.

**Definition 2.15** (Homologiegruppen). Sei  $K$  ein Simplicialkomplex.

- Für  $n \geq 0$  definiere die **Kettengruppen**  $C_n(K)$  als die  $\mathbb{F}_2$ -Vektorräume, die von den  $n$ -Simplizes aus  $K$  als Basiselemente erzeugt werden. Ein element  $c \in C_n(K)$  heißt dann auch  $n$ -**Kette**. Setze zudem  $C_{-1} := \{0\}$ .
- Man definiert nun für  $n \geq 0$  die **Randabbildung**  $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ , die auf den Basiselementen dadurch gegeben ist, einen  $n$ -Simplex auf die (formale) Summe seiner  $n - 1$ -Teilsimplizes abbildet.  $\partial_0$  sei hierbei die Nullabbildung.
- Elemente aus  $\ker \partial_n$  heißen  $n$ -**Zyklen**, Elemente aus  $\text{im } \partial_{n+1}$  heißen  $n$ -**Ränder**.
- Man definiert nun die **Homologiegruppen** von  $K$  als

$$H_n(K) := \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}.$$

Auch hier sind einige motivierende Erklärungen angebracht:

- Die Motivation für die Betrachtung der  $n$ -Ketten kommt wie bereits erwähnt daher, dass wir nicht nur einzelne Kanten, sondern auch Kantenzüge betrachten wollen. Ein Kantenzug ist jetzt einfach eine 1-Kette.
- Die Motivation dafür, über  $\mathbb{F}_2$  zu arbeiten, kommt daher, dass wir uns nicht um Orientierungsfragen kümmern müssen, weil Vorzeichen jetzt irrelevant werden. Es ist möglich, die Homologietheorie auch mit Koeffizienten z.B. in  $\mathbb{Z}$  zu betreiben<sup>9</sup>, das ist uns aber zu kompliziert.
- Wir hatten den Rand eines  $n$ -Simplex bereits als die Menge seiner  $n - 1$ -Teilsimplizes definiert, das deckt sich mit der gerade eben definierten Randabbildung  $\partial_n$ , die einen  $n$ -Simplex auf die *Summe* (anstatt der Menge) seiner  $n - 1$ -Teilsimplizes abbildet. In **Beispiel 2.5** ist also beispielsweise

$$\partial_2 \left( \triangle \right) = \triangle + \triangle + \triangle$$

Die Definition der  $n$ -Ränder passt also auch zu unserem bisherigen Verständnis von Rändern.

- Ketten sind jetzt Verallgemeinerungen von dem, was wir zuvor gemeinhin als 'geschlossener Kantenzug' bezeichnet haben. Man beachte aber, dass es jetzt vorkommen kann, dass eine 1-Kette beispielsweise aus 4 Kanten besteht, dann ist sie recht offensichtlich nicht der Rand *eines* Dreiecks,

<sup>9</sup>Man muss dann aber mit sog. *Moduln* arbeiten; im Falle von  $\mathbb{Z}$  ergeben sich abelsche Gruppen. Daher auch der Name der *Homologiegruppe*, obwohl es für uns sogar stets  $\mathbb{F}_2$ -Vektorräume sind.

dafür aber (potenziell) die Summe der Ränder von mehreren Dreiecken, also von einer 2-Kette.

- Wir hatten gesagt, dass ein geschlossener Kantenzug ein Loch beschreibt, wenn er kein Rand ist. In einem Simplicialkomplex beschreibt nun eine  $n$ -Kette  $c$  ein Loch, wenn sie kein  $n$ -Rand ist, d.h. wenn die Klasse  $|c| \in H_n(K)$  *nicht* das triviale Element aus  $H_n(K)$  ist.
- Wir haben jetzt zusätzlich noch den Vorteil gewonnen, dass wir tatsächlich nicht nur von der Existenz von Löchern sprechen können, sondern sogar mit Ihnen rechnen können, weil wir die - von der Geometrie völlig losgelösten (wenn auch dadurch definierten) - Homologiegruppen (für uns: Vektorräume) definiert haben. Das ist auch das namensgebende Element für die ALGEBRAISCHE Topologie: Wir haben geometrisches in algebraisches übersetzt.

**Nebenbemerkung 2.16** (Formale Details). Um  $H_n(K)$  definieren zu können, muss man zunächst noch nachrechnen, dass für die Untervektorräume  $\ker \partial_n$ , im  $\partial_{n+1} \subseteq C_n$  tatsächlich immer im  $\partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$  gilt, sonst können wir auch keinen Quotienten bilden.

Wir haben also gesehen, dass sich mit Simplicialkomplexen nun Löcher in sinnvoller Art und Weise beschreiben lassen. Allerdings brauchen wir dazu (bisher) auch einen Simplicialkomplex. Für das Möbiusband, den Torus und die 2-Sphäre haben wir in [Abbildung 5](#) bereits geeignete Simplicialkomplexe - man spricht dann auch von **Triangulierungen** dieser Räume - gesehen. Allgemein verschafft folgender Satz Abhilfe:

**Satz\* 2.17.** Jede kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit ist *triangulierbar*, d.h. es gibt einen Simplicialkomplex, der homöomorph zur Mannigfaltigkeit ist.

Damit können wir also nun auch die Homologiegruppen einer beliebigen kompakten, differenzierbaren Mannigfaltigkeit (wie sie es bei uns immer sein werden) definieren, indem wir eine Triangulierung wählen, und dann die Definition für Simplicialkomplexe anwenden.

**Nebenbemerkung 2.18.** An dieser Stelle *muss* man sich eigentlich überlegen, dass die entstehenden Homologiegruppen unabhängig von der Wahl der Triangulierung der Mannigfaltigkeit sind. Das ignorieren wir an dieser Stelle gekonnt und glauben einfach, dass alles so funktioniert, wie wir es uns wünschen.

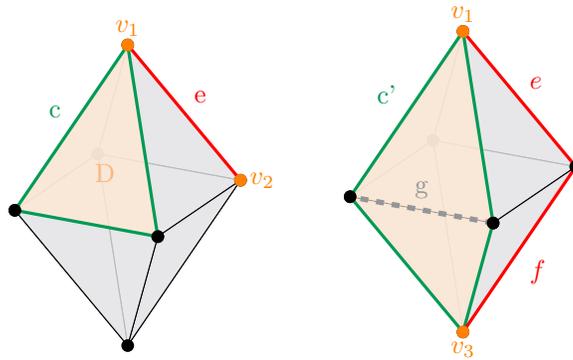


Abbildung 6: Ausgewählte Ketten im Simplicialkomplex der 2-Sphäre

**Beispiel 2.19** (Homologiegruppen der Sphäre). Sei  $S^2$  die 2-Sphäre, und betrachte die Triangulierung, die wir bereits in **Abbildung 5** gesehen haben. Wir überlegen uns zunächst, dass die Kettengruppen gegeben sind durch

$$\begin{array}{ccccccccc}
 C_3 & \xrightarrow{\partial_3} & C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\partial_0} & C_{-1} \\
 \wr & & \wr & & \wr & & \wr & & \wr \\
 \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{F}_2^8 & \longrightarrow & \mathbb{F}_2^{12} & \longrightarrow & \mathbb{F}_2^8 & \longrightarrow & \{0\}
 \end{array}$$

Um  $H_0(S^2)$  zu bestimmen, müssen wir also  $\ker \partial_0 / \text{im } \partial_1$  berechnen. Es ist  $\ker \partial_0 = C_0$ . Um  $\text{im } \partial_1$  zu berechnen, betrachte zunächst den linken Simplicialkomplex in **Abbildung 6**, in dem die 1-Kette  $e$  zu sehen ist. Nun ist  $\partial_1(e) = v_1 + v_2 = v_1 - v_2$ , also muss  $|v_1| = |v_2|$  für die Klassen der 0-Ketten  $v_0, v_1$  in  $H_0(S^2)$  gelten. Im zweiten Bild ist die 1-Kette  $e + f$  zu sehen, dessen Rand nun gegeben ist durch

$$\partial_1(e + f) = \partial_1(e) + \partial_1(f) = v_1 + v_2 + v_2 + v_3 = v_1 + v_3.$$

also ist auch  $|v_1| = |v_3| \in H_0(S^2)$ . Man erkennt leicht, dass also in der Tat *alle* Punkte  $v_1, \dots, v_6$  die gleiche Klasse in  $H_0(S^2)$  erzeugen werden, insgesamt kommt man nun zu dem Ergebnis, dass

$$H_0(S^2) = \mathbb{F}_2^6 / \langle v_i - v_j \rangle = \mathbb{F}_2^6 / \langle v_i - v_0 \rangle \cong \mathbb{F}_2.$$

Für  $H_1(S^2)$  betrachten wir  $\ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ . Beispielsweise ist die grüne 1-Kette  $c$  im linken Bild ein 1-Zyklus, d.h.  $c \in \ker \partial_1$ , allerdings gilt für den 2-Simplex  $D$  im linken Bild auch, dass  $\partial_2(D) = c$ , weswegen  $c$  auch ein 1-Rand ist. Die Klasse von  $c$  in  $H_1(S^2)$  ist also trivial.

Für die 1-Kette  $c'$  im rechten Bild gilt ähnliches: es handelt sich zwar um einen Zyklus, jedoch ist  $c'$  auch das Bild unter  $\partial_2$  von den beiden orange unterlegten Dreiecken. Hier ist wichtig, dass wir 2-Ketten zugelassen haben, und nicht nur 2-Simplizes, denn  $c'$  ist *nicht* Rand eines 2-Simplex. Da sich die Kante  $g$  allerdings unter der Randabbildung  $\partial_2$  'kürzt' (sie ist Rand beider markierter 2-Simplizes), ist  $c'$  dennoch ein 1-Rand nach Definition. Auch die Klasse von  $c'$  ist also trivial.

Mit etwas mehr Überlegungen kommt man tatsächlich zu dem Schluss, dass *alle* 1-Ketten der Sphäre auch 1-Ränder sind, folglich ist

$$H_1(S^2) = 0.$$

trivial.

Für  $H_2(S^2)$  untersuchen wir nach Definition  $\ker \partial_2 / \text{im } \partial_3$ . Es ist  $\text{im } \partial_3$  trivial, weil es nur die leere 3-Kette gibt, also  $H_2(S^2) \cong \ker \partial_2$ . Man stellt nun fest, dass die einzige nichttriviale 2-Kette, die auch ein 2-Zyklus ist, die Summe aller 2-Simplizes ist. Man erhält also damit

$$H_2(S^2) \cong \mathbb{F}_2.$$

Auch das ist kein Zufall: Wir werden feststellen, dass es bei jeder  $n$ -dimensionalen, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit genau ein nichttriviales Element in  $H_n(X)$  gibt, das man durch die Summe aller  $n$ -Simplizes dieser Mannigfaltigkeit erhält, weswegen  $H_n(X) \cong \mathbb{F}_2$  folgt.

**Beispiel 2.20.** In der Tat lassen sich ebige Überlegungen auch für die  $n$ -Sphäre durchführen, man gelangt dann dazu, dass für die  $n$ -Sphäre  $S^n$  ihre Homologiegruppen gegeben sind durch:

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & k = 0, n \\ \{0\} & \text{sonst} \end{cases}.$$

**Beispiel 2.21** (Homologiegruppen des Torus). Sei  $T$  der Torus, wir wollen auch hier die Homologiegruppen bestimmen. Dazu betrachte [Abbildung 7](#) mit einigen skizzierten Ketten im Simplicialkomplex des Torus.

Wie auch in [Beispiel 2.20](#) erhält man, dass  $H_0(T) \cong \mathbb{F}_2$ , weil der Torus (weg)zusammenhängend ist, und  $H_2(T) \cong \mathbb{F}_2$ , indem wir als nichttriviales Element die 2-Kette wählen, die die Summe aller 2-Simplizes ist. Der interessante Teil ist also  $H_1(T)$ .

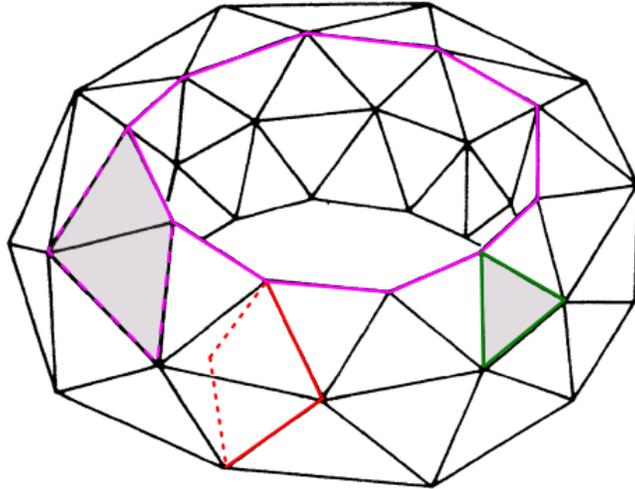


Abbildung 7: Ausgewählte Ketten im Simplicialkomplex des Torus

Die dunkelgrüne 1-Kette ist ein 'typischer' 1-Zyklus, allerdings handelt es sich auch um einen 1-Rand, denn das grau unterlegte Dreieck (2-Simplex) hat als Rand genau diesen grünen Zyklus. Die erzeugte Homologiekategorie ist also trivial.

Interessanter ist die pinke 1-Kette, die ebenfalls ein 1-Zyklus ist. Man stellt nun aber fest, dass diese *nicht* ein 1-Rand ist<sup>10</sup>. Die erzeugte Homologiekategorie ist also *nicht* trivial.

Gleiches gilt für den roten skizzierten 1-Zyklus: Auch dieser ist kein Rand und die erzeugte Klasse somit nicht trivial. Es stellt sich sogar weiter heraus, dass der rote und der pinke Zyklus *nicht* die gleiche Homologiekategorie darstellen (auch das zeigen wir nicht). Insbesondere erhalten wir mit der Summe der beiden 1-Zyklen einen weiteren 1-Zyklus, der nicht trivial und verschieden zu den bisherigen ist. Also ergibt sich bereits, dass

$$\emptyset, \text{ pinke Zyklus, roter Zyklus, pinke Zyklus} + \text{ roter Zyklus} \in H_1(T).$$

paarweise verschiedene Elemente sind.

Betrachte nun eine leichte Abwandlung des pinken Zyklus, indem wir einen 'Umweg' über die drei gestrichelten pinken Kanten nehmen, und dafür die 'umgangene' pinke Kante entfernen. Auch diese ist ein 1-Zyklus, und auch diese erzeugte Homologiekategorie ist nicht trivial. Man stellt nun aber fest, dass diese Variation vom ursprünglichen pinken Zyklus sich nur um den Rand der beiden 'umlaufenen', grau unterlegten 2-Simplices unterscheidet.

Mit anderen Worten: die beiden pinken Varianten unterscheiden sich nur um einen 2-Rand, und erzeugen somit die gleiche Homologiekategorie.

Genau diese Identifikation 'ermöglicht' es uns erst, dass wir 'das' Loch, das der pinke Zyklus umläuft, nicht doppelt zählen: Der gestrichelte pinke 1-Zyklus ist nur eine Variante des gleichen Zyklus.

Man überlegt sich abschließend, dass alle weiteren 1-Zyklen die gleiche Homologiekategorie erzeugen wie die vier bereits erwähnten, d.h. sie unterscheiden sich nur um einen 1-Rand von (genau) einem dieser vier 1-Zyklen.

Zusammenfassend ergibt sich also:

$$H_k(T) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & k = 0 \\ \mathbb{F}_2^2 & k = 1 \\ \mathbb{F}_2 & k = 2 \\ \{0\} & k \geq 3 \end{cases}.$$

### 2.3.4 Pushforward

Da wir später vermehrt auch über Abbildungen reden werden - man erinnere sich an **Beobachte 1.13**, wollen wir hier gleich den sogenannten *Pushforward* einführen. Er erlaubt es, für stetige Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  auch induzierte Abbildungen zwischen den Homologiegruppen zu betrachten.

**Definition 2.22** (Pushforward). Sei  $f: X \rightarrow Y$  stetig, dann induziert  $f$  eine Abbildung

$$f_* : \begin{array}{ccc} H_p(X) & \longrightarrow & H_p(Y) \\ p\text{-Simplex} & \longmapsto & f(p\text{-Simplex}) \end{array}$$

Ein paar Sachen sind zu beachten:

- Als erstes stellen wir  $X, Y$  mittels Simplicialkomplexen dar.
- Es ist  $H_p(X) := \ker \partial_p / \text{im } \partial_{p+1}$ , wir haben oben eigentlich nur das Bild der Basiselemente aus  $C_p$  angegeben. Dann definiert man jedoch  $f_*$  als lineare Fortsetzung dieser und erhält eine Abbildung  $C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ .
- Es könnte hier etwas Probleme geben im Sinne, dass ein Simplex in  $X$  nicht notwendigerweise auf einen in  $Y$  abgebildet wird. Man 'wackelt' hierzu etwas an der Abbildung  $f_*$  oder verfeinert die Simplicialkomplexe (zerteilen der Simplexes in kleinere), um eine wohldefinierte Abbildung zu erhalten.

<sup>10</sup>Durch etwas ausprobieren ist man sehr schnell dieser Meinung, und das ist auch gut für die Intuition. Einen formalen Beweis geben wir hier jedoch nicht.

- Die Abbildung  $C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$  kann man nun einschränken auf  $\ker \partial_p \subseteq C_p(X)$ , man rechnet nach, dass dann Bilder auch in  $\ker \partial_p: C_p(Y) \rightarrow C_{p-1}(Y)$  liegen und erhält eine Abbildung

$$\ker \partial_{p,X} \rightarrow \ker \partial_{p,Y} \twoheadrightarrow \ker \partial_{p,Y} / \operatorname{im} \partial_{p+1,Y} = H_p(Y)$$

- Diese faktorisiert nun entsprechend, und man erhält eine induzierte Abbildung

$$H_p(X) = \ker \partial_{p,X} / \operatorname{im} \partial_{p+1,X} \rightarrow H_p(Y).$$

**Nebenbemerkung 2.23.** Einige Details wurden verschwiegen. Zunächst sei gesagt, dass man üblicherweise für stetige Abbildungen  $f: X \rightarrow Y$  sowieso mit allgemeinerer Homologie arbeitet, man braucht dann nicht mehr tatsächliche Simplicialkomplexe, sondern betrachtet stetige Abbildungen von Simplizes in die entsprechenden Räume. Der Pushforward vereinfacht sich dann stark, weil wir dann einfach mit  $f$  postkomponieren können, die restliche Theorie wird jedoch (erstmal) wesentlich komplizierter / technischer.

Zudem muss man sagen, dass 'Extremfälle' (eigentlich nicht so extrem) auftreten, in denen  $Y$  niedrig-dimensionaler ist, und gar keine entsprechenden Simplizes enthält, auf die wir entsprechend abbilden können. Die resultierenden Bilder unter  $f_*$  sind dann trivial, aber obige Definition (nicht ganz) korrekt.

Natürlich muss man sich noch sehr viel bezüglich Wohldefiniertheit überlegen, was wir auch unterdrückt haben.

Was man jedoch mitnehmen sollte ist:

**Abbildungen zwischen (kompakten, differenzierbaren) Mannigfaltigkeiten induzieren Abbildungen zwischen den entsprechenden Homologiegruppen. Das erlaubt eine Übersetzung von geometrischen in algebraische Eigenschaften.**

Potenziell 'verliert' man hierdurch Informationen, diese Einsicht wird jedoch der Schlüsselbaustein für unseren letztendlichen Beweis von [Satz 1.10](#) sein.

### 2.3.5 Untermannigfaltigkeiten

Bisher können wir zwar Mannigfaltigkeiten ebenfalls ihre Homologiegruppen zuordnen, allerdings haben wir noch keine (sinnvollen) Möglichkeiten, Elemente dieser zu beschreiben, ohne einen Simplicialkomplex gewählt zu haben.

[Satz\\* 2.17](#) lässt sich jedoch auch dazu erweitern, dass wir Triangulierungen einer kompakten, differenzierbaren Untermannigfaltigkeit<sup>11</sup> auf die Mannigfaltigkeit

selbst fortsetzen können. Die Triangulierung der Untermannigfaltigkeit ist dann stets ein Zyklus.<sup>12</sup>

Auf diese Weise induziert jede kompakte, differenzierbare  $k$ -Untermannigfaltigkeit  $N$  einer kompakten, differenzierbaren  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  eine Homologieklassse von  $M$ .

**Notation 2.24.** Sei  $M$  eine kompakte, differenzierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit, und sei  $N$  eine kompakte, differenzierbare  $k$ -Untermannigfaltigkeit<sup>13</sup>. Dann notieren wir die von  $N$  induzierte Homologieklassse von  $M$  mit

$$|N| \in H_k(M).$$

**Nebenbemerkung 2.25** (Formale Details). Auch hier muss man sich wieder überlegen, warum das überhaupt wohldefiniert, dazu muss man zeigen, dass auch diese induzierte Klasse unabhängig von der Wahl der Triangulierung von  $N$  und der Fortsetzung auf  $M$  ist. Im Wesentlichen will man dazu zeigen, dass sich beliebige zwei Triangulierungen zu einer weiteren Triangulierung verfeinern lassen, und dass Verfeinerungen von Triangulierungen die Homologiegruppen nicht beeinflussen. Auch das übersteigt unsere Möglichkeiten hier jedoch um Vieles und wir daher weggelassen.

Mit diesem Wissen im Hinterkopf widmen wir uns nun wieder den projektiven Räumen:

**Beispiel 2.26** (Homologieklassen des projektiven Raums). Betrachte die  $n$ -Sphäre  $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ . Für jede  $k$ -dimensionale Hyperebene  $E$ , die durch den Ursprung verläuft, erhalten wir als Schnitt

$$S^n \cap E \cong S^{k-1}.$$

eine niederdimensionale Sphäre. Nach Antipodenidentifikation erhalten wir also analog, dass  $\mathbb{P}^k \subseteq \mathbb{P}^n$  für  $0 \leq k \leq n$  natürlich als Untermannigfaltigkeit vorkommt. Wir wissen also bereits, dass

$$0 = |\emptyset|, |\mathbb{P}^k| \in H_k(\mathbb{P}^n).$$

und haben damit Elemente aus den Homologiegruppen von  $\mathbb{P}^n$  beschrieben. Es stellt sich heraus, dass dies alle sind, und dass diese auch die einzigen sind.

<sup>12</sup>Es reicht, eine abgeschlossene, differenzierbare Untermannigfaltigkeit zu haben, da unsere Mannigfaltigkeit selbst ja schon kompakt ist.

<sup>12</sup>Wir beweisen das aber nicht.

<sup>13</sup>z.B. eine abgeschlossene, differenzierbare Untermannigfaltigkeit.

**Notationsmissbrauch 2.27.** Wir werden fortan sehr oft  $S^p \subseteq S^n$  oder  $\mathbb{P}^p \subseteq \mathbb{P}^n$  notieren. Wir meinen hierbei dann stets eine Teilmenge von  $S^n$  bzw.  $\mathbb{P}^n$ , die durch obige Konstruktion hervorgegangen ist, d.h. durch den Schnitt einer  $p$ -dimensionalen Hyperebene, die durch den Ursprung geht, mit  $S^n$  sowie - im Falle des projektiven Raums - anschließender Antipodenidentifikation.

**Satz\* 2.28.** Für  $\mathbb{P}^n$  sind die Homologiegruppen gegeben durch

$$H_p(\mathbb{P}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & 0 \leq p \leq n \\ \{0\} & p > n \end{cases}.$$

wobei im ersten Fall das nichttriviale Element durch  $|\mathbb{P}^p|$  für eine Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{P}^p \subseteq \mathbb{P}^n$  gegeben ist.

**Notationsmissbrauch 2.29.** Der Satz enthält auch die implizite Aussage, dass die erzeugte Homologieklass  $|\mathbb{P}^p|$  nicht von der Wahl der Einbettung abhängt, sofern diese **Notationsmissbrauch 2.27** entspricht. Wir werden deswegen auch nicht weiter zwischen den verschiedenen Wahlen der Einbettungen (sprich: Wahlen von Hyperebenen) unterscheiden und meinen mit  $|\mathbb{P}^p| \in H_p(\mathbb{P}^n)$  stets *die* Homologieklass *einer* beliebigen solchen Einbettung von  $\mathbb{P}^p$ .

### 2.3.6 Bettizahlen

Als kleinen Abstecher (die folgenden Resultate sind für den Satz von Hopf irrelevant) wollen wir uns in diesem Abschnitt den *Bettizahlen* widmen, die auf natürliche Weise aus den Homologiegruppen hervorgehen, und uns eine etwas 'anschaulichere' Perspektive auf die Homologietheorie ermöglichen.

**Definition 2.30** (Betti-Zahl). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Falls  $H_p(X)$  als  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum endlich-dimensional ist, so heißt

$$b_p(X) := \dim H_p(X).$$

die  $p$ -te **Bettizahl** von  $X$ .

**Beispiel 2.31** (Bettizahlen des Torus). Wir haben in **Beispiel 2.21** bereits die Homologiegruppen des Torus bestimmt. Aus der Definition folgt nun

sofort:

$$b_0(T) = 1, \quad b_1(T) = 2, \quad b_2(T) = 1, \quad b_k(T) = 0.$$

Im Allgemeinen beschreibt  $b_0(T)$  die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten eines Raumes  $X$ ,  $b_0(T) = 1$  sagt also genau, dass der Torus wegzusammenhängend ist. Vergleiche hierzu auch die Argumentation bei [Beispiel 2.19](#), wo wir uns das bereits (mehr oder weniger) allgemein überlegt haben.

$b_1(T) = 2$  interpretieren wir als die zwei eindimensionalen Löcher, die der Torus hatte, vgl. hierzu auch nochmal [Abbildung 2](#), in der wir die beiden Schleifen, die die entsprechenden Löcher umrunden, anfangs diskutiert hatten.

$b_2(T) = 1$  sagt uns nun auch wie gewünscht, dass der Torus ein 'zweidimensionales' Loch besitzt.

### 2.3.7 Ausblick

Wir haben nun (grob) gesehen, wie sich mit der simplizialen Homologie einem Simplizialkomplex Vektorräume zuordnen lassen. Für eine allgemeine Homologietheorie müsste man noch wesentlich mehr Ergebnisse erarbeiten, man kann dann tatsächlich auch *jedem* topologischen Raum Homologiegruppen zuordnen (und diese stimmen bis auf die Koeffizientenwahl im Falle von Simplizialkomplexen mit unseren überein). Für Näheres sei beispielsweise auf [\[Hat02\]](#) verwiesen.

## 2.4 Der Homologiering

Nachdem wir jetzt die einzelnen Homologieringe eines Raumes 'gut' (genug) verstehen, fasst man diese zu einem Ring zusammen. Das hat den Vorteil, dass man jetzt auch Beziehungen zwischen Homologieklassen unterschiedlicher Dimension untersuchen kann:

**Definition 2.32** (Homologiering). Der **Homologiering** einer kompakten, differenzierbaren Mannigfaltigkeit ist definiert als

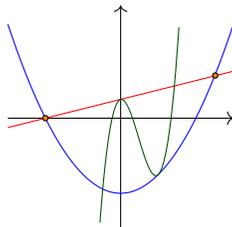
$$H_*(X) := \bigoplus_{p \geq 0} H_p(X).$$

Der Pushforward  $f_*$  der Homologiegruppen induziert für  $f: X \rightarrow Y$  eine Abbildung  $f_*: H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$  der entsprechenden Homologieringe.

Es handelt sich hierbei (zunächst) um einen  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum. Wie der Name aber vermuten lässt, kann man auf dieser direkten Summe ein Produkt, das sogenannte *Schnittprodukt*, definieren, wodurch  $H_*(X)$  zu einem (kommutativen) Ring wird.

**Idee (Schnittprodukt).** Wir wissen bereits, dass Homologieklassen durch Untermannigfaltigkeiten repräsentiert sind. In hinreichend 'allgemeiner Lage' wollen wir diese schneiden, um eine weitere Untermannigfaltigkeit zu erhalten, deren Homologieklassen wir dann als Produkt auffassen.

**Beispiel 2.33** (Einfache Beispiele des Schnittprodukts). Betrachte eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit, z.B.  $\mathbb{R}^2$ . 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten sind durch Kurven gegeben, 'allgemeine Lage' würde hier bedeuten, dass sich die Kurven nicht tangieren, sondern 'schön' schneiden (potenziell mehrmals). In folgender Abbildung wäre also das Produkt der roten und der blauen Untermannigfaltigkeit die 0-dimensionale Untermannigfaltigkeit, die aus den beiden orangen Punkten besteht, die grüne Untermannigfaltigkeit lässt sich jedoch respektive nicht mit der roten oder blauen multiplizieren, weil sie sie jeweils tangiert.



Das motiviert auch den Namen *Schnittprodukt*: Im einfachsten Fall zählen wir die Anzahl der Schnittpunkte von zwei Untermannigfaltigkeiten. In unserem Fall - wegzusammenhängende Untermannigfaltigkeiten - zählen wir dann letztendlich die Parität.

**Beispiel 2.34** (Dimensionen von Schnitten). Wir wollen an dieser Stelle noch eine kurze Dimensionsbetrachtung machen. In vorherigem Beispiel haben wir 1-dimensionale Untermannigfaltigkeiten geschnitten und eine 0-dimensionale als Schnitt erhalten. Das hatte aber erheblich damit zu tun, dass der gesamte Raum Dimension 2 hatte: Im 3-dimensionalen schneiden sich zwei Kurven in 'allgemeiner Lage' *nicht*. Ein sehr einfacher Spezialfall ergibt sich hier aus der linearen Algebra:

Betrachte  $\mathbb{R}^n$ , und zwei lineare Unterräume  $U_1 \cong \mathbb{R}^{n-p}, U_2 \cong \mathbb{R}^{n-q}$  für  $0 \leq p, q \leq n$ . Nimm weiter an, dass  $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^n$  (nicht notwendigerweise direkte Summe, aber Summe. Das 'übersetzt' die 'allgemeine Lage'). Dann können wir die Abbildung

$$\varphi \left| \begin{array}{l} U_1 \oplus U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (u_1, u_2) \longmapsto u_1 - u_2 \end{array} \right.$$

betrachten, und erhalten aus dem Rangsatz, dass

$$\begin{aligned} & \dim(U_1 \oplus U_2) - \dim \ker \varphi = \dim \operatorname{im} \varphi \\ \iff & \dim(U_1 \oplus U_2) - \dim(U_1 \cap U_2) = \dim \mathbb{R}^n \\ \iff & \dim(U_1 \cap U_2) = \dim(U_1 \oplus U_2) - \dim \mathbb{R}^n \\ & = (n-p) + (n-q) - n \\ & = n - (p+q) \end{aligned}$$

Die Umformulierung gilt hierbei, weil  $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^n \implies \operatorname{im} \varphi = \mathbb{R}^n$  sowie

$\ker \varphi = \{(u_1, u_2) \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 \mid u_1 = u_2\} = \{(u, u) \mid u \in U_1, U_2\} \cong U_1 \cap U_2$ .

Also folgt  $U_1 \cap U_2 \cong \mathbb{R}^{n-(p+q)}$ . Wir lernen also:

**Die Kodimensionen von Unterräumen in allgemeiner Lage addieren sich bei Schnittbildung.**

Die richtige Definition von 'allgemeine Lage', die man verwenden will, heißt *transversal*, wir wollen aber nicht zu sehr ins Detail gehen, weswegen wir uns mit Folgendem begnügen.

**Definition 2.35** (Tangententialraum, Transversal). Sei  $M$  eine  $n$ -dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit. Dann gibt es<sup>14</sup> in jedem Punkt  $x \in M$  den **Tangententialraum**  $T_x M$ , ein  $n$ -dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der sogenannten **Tangententialvektoren** an  $M$  in  $x$ .

Zwei Untermannigfaltigkeiten  $X, Y$  von  $M$  liegen **transversal**, wenn für jeden Schnittpunkt  $x \in X \cap Y$  die Untervektorräume  $T_x X, T_x Y \subseteq T_x M$  den Tangentialraum  $T_x M$  aufspannen.

**Beispiel 2.36** (Tangententialraum). Betrachte  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  als 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^3$ , zu sehen auch in **Abbildung 8**. Der Tangentialraum in einem Punkt  $x \in S^2$  ist genau die Tangentialebene an die Sphäre  $S^2$  in  $x$ .

**Definition 2.37** (Schnittprodukt). Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit, und seien  $M, N$  Untermannigfaltigkeiten der Kodimension  $p, q$ , die *transversal*

<sup>14</sup>Wir geben an dieser Stelle keine genaue Definition, weil das zu technisch wäre. Der Name ist aber Programm.

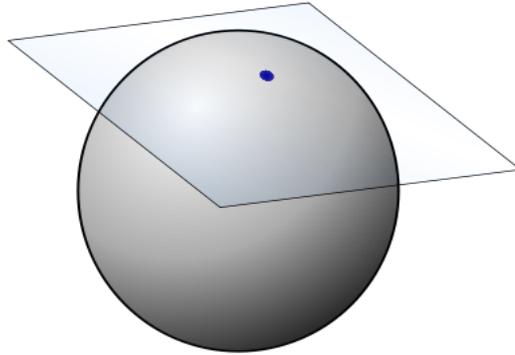


Abbildung 8: Visualisierung des Tangentialraums der Sphäre

zueinander liegen, dann definiere

$$\left. \begin{array}{l} H_{n-p}(X) \times H_{n-q}(X) \longrightarrow H_{n-(p+q)}(X) \\ (|M|, |N|) \qquad \qquad \qquad \longmapsto |M \cap N| \end{array} \right\}$$

als das **Schnittprodukt**. Das definiert eine Multiplikation auf

$$H_* := \bigoplus_{n \geq 0} H_n(X).$$

**Beobachte 2.38.** Mit dem Schnittprodukt wird  $H_*(X)$  nun zu einer  $\mathbb{F}_2$ -Algebra.

**Bemerkung 2.39.** Die 'Signatur' des Schnittprodukts ergibt sich hierbei als Analogon zu **Beispiel 2.34**: die Kodimensionen der Untermannigfaltigkeiten addieren sich.

**Nebenbemerkung 2.40.** Auch hier ergeben sich wieder die üblichen Probleme, warum das überhaupt wohldefiniert ist und so funktioniert, unter anderem sollte man eigentlich beantworten:

- Im Allgemeinen ist nicht jede Homologieklass durch eine Untermannigfaltigkeit repräsentiert
- Man könnte fragen: Warum gibt es für zwei Homologieklassen stets zwei repräsentierende Untermannigfaltigkeiten, die transversal zueinander liegen? In der Tat ist das aber gar nicht so, wenn die Kodimensionen in Summe  $n$  übersteigen, kann das auch gar nicht so sein. In diesem Fall ist das Produkt der Homologieklassen Null, das neutrale Element von  $H_0(X)$ .

- Warum ergeben verschiedene Repräsentanten die gleiche Homologieklasse des Schnittes?

All das lassen wir (wie leider immer) hier unbeantwortet.

### 2.4.1 Der Homologiering von $\mathbb{P}^n$

Wie zu Beginn erwähnt, wollen wir uns nun konkreter den projektiven Raum ansehen. Wir kennen aus **Satz\* 2.28** bereits eine vollständige Beschreibung der Homologiegruppen von  $\mathbb{P}^n$ , und damit auch die Vektorraumstruktur von  $\mathbb{P}^n$ , nämlich genau

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 H_*(\mathbb{P}^n) & := & H_0(\mathbb{P}^n) & \oplus & H_1(\mathbb{P}^n) & \oplus & \dots & \oplus & H_p(\mathbb{P}^n) & \oplus & \dots \\
 & & \wr & & \wr & & & & \wr & & \\
 & & \mathbb{F}_2 & \oplus & \mathbb{F}_2 & \oplus & \dots & \oplus & \mathbb{F}_2 & \oplus & \dots \\
 & & \parallel & & \parallel & & & & \parallel & & \\
 & & \{|\emptyset|, |\mathbb{P}^0|\} & \oplus & \{|\emptyset|, |\mathbb{P}^1|\} & \oplus & \dots & \oplus & \{|\emptyset|, |\mathbb{P}^p|\} & \oplus & \dots
 \end{array}$$

Es verbleibt, die multiplikative Struktur des Homologierings zu bestimmen. Das Schnittprodukt der neutralen Klassen mit einer beliebigen anderen Klasse ergibt stets wieder die neutrale Klasse (in der entsprechenden Homologiegruppe), denn wir schneiden die leere Mannigfaltigkeit mit etwas anderem. Der einzig interessante Fall ist also  $|\mathbb{P}^p| \cdot |\mathbb{P}^q|$  für  $0 \leq p, q \leq n$ , den das folgende Lemma beantwortet:

**Lemma 2.41.** Betrachte  $X = \mathbb{P}^n$ . Dann ist

$$|\mathbb{P}^{n-p}| \cdot |\mathbb{P}^{n-q}| = |\mathbb{P}^{n-(p+q)}|$$

*Beweis.* Wir gehen zunächst wieder zu  $S^n$  über, d.h. wir wissen, dass

$$\mathbb{P}^{n-p} \cap \mathbb{P}^{n-q} = \text{pr}(S^{n-p} \cap S^{n-q})$$

, wobei  $\text{pr}: S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  die kanonische Projektion notiere. Um die Sphären zu schneiden, können wir aber einfach ihre entsprechenden charakterisierenden Hyperebenen (lineare Unterräume) schneiden, und diese dann wieder mit  $S^n$  schneiden, d.h.

$$S^{n-p} \cap S^{n-q} = (\mathbb{R}^{n-p} \cap \mathbb{R}^{n-q}) \cap S^n = \mathbb{R}^{n-(p+q)} \cap S^n = S^{n-(p+q)}.$$

Wir betreiben hier natürlich viel Notationsmissbrauch, indem wir die Einbettungen der Teilräume unterdrücken, da aber  $\mathbb{P}^{n-p}, \mathbb{P}^{n-q}$  transversal liegen (nach Definition des Schnittprodukts), gilt entsprechend übersetzt  $\mathbb{R}^p + \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^n$  (sie spannen den  $\mathbb{R}^n$  auf), und deswegen kennen wir die propagierte Schnitteigenschaft bereits aus der linearen Algebra. Nach anwenden von  $\text{pr}$  gelangen wir nun zum gewünschten Resultat.  $\square$

## 2.5 Kohomologie

Wenn man nun so mit dem Schnittprodukt rechnet, wird man feststellen, dass die Kodimensionen sehr nervig werden. Eine 'Lösung' bietet der Übergang zu den Kohomologierungen<sup>15</sup>, die wir im Folgenden einführen und genauer betrachten werden.

### 2.5.1 Kohomologiegruppen

**Definition 2.42.** Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit, dann nennen wir den dualen Vektorraum zu  $H_q(X)$ ,

$$H^q(X) := \text{Hom}(H_q(X), \mathbb{F}_2).$$

die **Kohomologiegruppe** von  $X$  (mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2$ ).

Nur als Sanity Check: Das ist genau der zu  $H_q(X)$  *duale* Vektorraum, den wir auch aus der linearen Algebra kennen.

Analog zum **Pushforward** induziert eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  auch eine Abbildung zwischen den entsprechenden Kohomologiegruppen. Da es sich einfach um die zu  $f_*$  duale Abbildung (im Sinne der linearen Algebra und dualen Vektorräumen) handelt, dreht sich die Richtung der Abbildung um. Wir erhalten also:

**Definition 2.43** (Pullback). Sind  $X, Y$  Mannigfaltigkeiten und ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig, so induziert  $f$  eine Abbildung

$$f^* : \begin{array}{ccc} H^q(Y) & \longrightarrow & H^q(X) \\ u & \longmapsto & u \circ f_* \end{array}$$

Auch diesem werden wir später nochmal begegnen.

### 2.5.2 Poincaré-Dualität

Dass Homologie und Kohomologie noch deutlich mehr miteinander zu tun haben als die jeweiligen Dualräume zu sein, stellte HENRI POINCARÉ 1893 fest<sup>16</sup>.

<sup>15</sup>Eigentlich ist das nicht die (Haupt)-Motivation für das Betrachten der Kohomologie, auch wenn er sehr wohl in allgemeiner Theorie eine bedeutende Rolle spielt. Wie auch HIRZEBRUCH in [al92, S. 236] anmerkt, ist der Schnitttring für Mannigfaltigkeiten (=Homologiering) schon wesentlich länger bekannt als die Kohomologie, die wir gleich kennenlernen werden und bietet eine geometrische Interpretation der Kohomologie, die eigentlich wesentlich allgemeiner definiert werden kann, als wir das im Folgenden tun werden.

<sup>16</sup>Eine erste Fassung davon. Die moderne Formulierung entstand erst in den 1930ern durch ČECH und WHITNEY.

**Satz\* 2.44** (Poincaré-Dualität). Sei  $X$  eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$D: H_{n-p}(X) \xrightarrow{\cong} H^p(X).$$

**Nebenbemerkung 2.45.** In der allgemeinen Fassung der Poincaré-Dualität findet sich noch die Forderung, dass  $X$  *orientierbar* (z.B. ist die Sphäre orientierbar; es gibt ein 'Innen' und 'Außen' der Oberfläche, das Möbiusband jedoch nicht) sein muss. Was das genau heißt, ist für uns unerheblich, da wir mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2$  arbeiten, und dann jede Mannigfaltigkeit eine eindeutige 'Orientierung' besitzt.

### 2.5.3 Bettizahlen

Als kleinen Abstecher schauen wir uns hier wieder kurz die Bettizahlen an, die wir in [Unterunterabschnitt 2.3.6](#) bereits kennengelernt haben. Es ergibt<sup>17</sup> sich nämlich aus der Poincaré-Dualität unmittelbar:

**Korollar 2.46.** Ist  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, sodass die Bettizahlen  $b_p(X)$  endlich sind, so ist

$$b_p(X) = b_{n-p}(X).$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $H_{n-p}(X)$  endlich-dimensional für jedes  $0 \leq p \leq n$ , denn die Bettizahlen sind genau die Dimensionen dieser Räume. Aus der linearen Algebra ist nun bekannt, dass

$$H_{n-p}(X) \cong \text{Hom}(H_{n-p}(X), \mathbb{F}_2) =: H^{n-p}(X).$$

indem wir zur Dualbasis übergehen (hier nutzen wir die endliche Dimension!). Aus der Poincaré-Dualität wissen wir jedoch, dass nun

$$H_{n-p}(X) \cong H^{n-p}(X) \cong H_p(X).$$

und anwenden der Dimension auf beiden Seiten liefert sofort

$$b_{n-p}(X) = \dim H_{n-p}(X) = \dim H_p(X) = b_p(X).$$

□

### 2.5.4 Der Kohomologiering

Mittels den Isomorphismen der Poincaré-Dualität können wir nun das Schnittprodukt wie gewünscht auf den Kohomologiering übertragen:

<sup>17</sup>Poincarés erste Formulierung war tatsächlich genau dieses Resultat.

**Definition 2.47.** Sei  $X$  eine kompakte Mannigfaltigkeit. Aus der Poincaré-Dualität ergibt sich auf dem **Kohomologiering**

$$H^*(X) := \bigoplus_{q \geq 0} H^q(X).$$

eine Multiplikation

$$H^p(X) \times H^q(X) \longrightarrow H^{p+q}(X).$$

die 'dual' ist zum Schnittprodukt.  $H^*(X)$  wird dadurch zu einer  $\mathbb{F}_2$ -Algebra.<sup>18</sup>

**Proposition\* 2.48.** Für  $f: X \rightarrow Y$  stetig ist der induzierte Pullback  $f^*: H^*(Y) \rightarrow H^*(X)$  ein Algebra-Morphismus.

*Erläuterungen zur Definition der Multiplikation.* Wir können sehr stupide notieren:

$$a \cdot_{H^*} b := D(D^{-1}(a) \cdot_{H_*} D^{-1}(b)).$$

wobei wir mit  $\cdot_{H_*}$  das Schnittprodukt und mit  $\cdot_{H^*}$  das Produkt auf dem Kohomologiering notieren. Für die Dimensionen veranschaulicht folgende Darstellung die 'Signatur' des Produkts:

$$\begin{array}{ccccccc} H^*(X) := & H^0(X) \oplus \dots \oplus & H^p(X) \oplus \dots \oplus & H^q(X) \oplus \dots \oplus & H^{p+q}(X) \oplus \dots \\ & \uparrow \cong & \uparrow \cong & \uparrow \cong & \uparrow \cong \\ & H_n(X) \oplus \dots \oplus & H_{n-p}(X) \oplus \dots \oplus & H_{n-q}(X) \oplus \dots \oplus & H_{n-(p+q)}(X) \oplus \dots \\ & & \cup & \cup & \cup \\ & & |M| & |N| & |M| \cdot |N| \end{array}$$

□

### 2.5.5 Kohomologie von $\mathbb{P}^n$

Mit **Satz\* 2.28** ergibt sich nicht nur die Produktstruktur auf  $H^*(\mathbb{P}^n)$ , sondern sogar eine 'explizitere' Darstellung der Algebra:

**Korollar 2.49.**

$$H^*(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{F}_2[t] / t^{n+1}$$

wobei  $t = D(|\mathbb{P}^{n-1}|)$  das von 0 verschiedene Elemente aus  $H^1(\mathbb{P}^n)$  ist.

<sup>18</sup>Die Algebra ist sogar *graduirt*, und das ist das wirklich 'schöne'.

*Beweis.* Aus der Poincaré-Dualität (Satz\* 2.44) ergibt sich zunächst mit Satz\* 2.28:

$$H^1(\mathbb{P}^n) \cong H_{n-1}(\mathbb{P}^n) = \{|\emptyset|, |\mathbb{P}^{n-1}|\}.$$

Jetzt macht es Sinn,  $t := D(|\mathbb{P}^{n-1}|) \in H^1(\mathbb{P}^n)$  als das nichttriviale Element zu notieren. Induktiv erhält man nun  $0 \neq D(|\mathbb{P}^{n-k}|) = t^k \in H^k(\mathbb{P}^n)$  für  $1 \leq k \leq n$  durch:

$$t^{k+1} = t \cdot t^k = D(|\mathbb{P}^{n-1}| \cdot |\mathbb{P}^{n-k}|) = D(|\mathbb{P}^{n-(k+1)}|).$$

also bereits  $H^k(\mathbb{P}^n) = \{0, t^k\}$  für  $1 \leq k \leq n$ . Da höhere Homologiegruppen trivial sind ergibt sich  $0 = t^{n+1} \in H^{n+1}(\mathbb{P}^n)$ .

Den Algebra-Morphismus erhält man nun leicht, indem man

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{F}_2[t] & \longrightarrow & H^*(\mathbb{P}^n) \\ \mathbb{F}_2 & \longrightarrow & H^0(\mathbb{P}^n) \\ t & \longmapsto & D(|\mathbb{P}^{n-1}|) \end{cases}$$

abbildet und den Isomorphiesatz für den Kern anwendet. □

Erinnern wir uns an die zu Beginn eingeführte Abbildung  $G$  (siehe 1.13, so interessieren wir uns auch für die Kohomologie von  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ .

**Idee.** Indem wir  $\mathbb{P}^i \subseteq \mathbb{P}^n$  sowie  $\mathbb{P}^j \subseteq \mathbb{P}^n$  kanonisch wählen, können wir eine Untermannigfaltigkeit  $\mathbb{P}^i \times \mathbb{P}^j \subseteq \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  der Dimension  $i + j$  konstruieren, die folglich eine Homologieklassse induziert.

Es stellt sich heraus, dass diese paarweise verschieden und auch bereits alle sind:

**Proposition\* 2.50.** Die Homologiegruppen von  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$  sind gegeben durch

$$H_p(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) = \bigoplus_{\substack{i+j=p \\ i,j \geq 0}} \mathbb{F}_2 \langle |\mathbb{P}^i \times \mathbb{P}^j| \rangle$$

**Korollar 2.51.** Es ist

$$H^*(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \cong \mathbb{F}_2[u, v] / (u^{n+1}, v^{n+1}).$$

wobei

$$u = D(|\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^n|), \quad v = D(|\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}|).$$

*Beweis.* Im Wesentlichen analog zu Korollar 2.49, deswegen skizziert. Man stellt zunächst

$$H^1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \cong H_{2n-1}(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) = \mathbb{F}_2 \langle \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \rangle \oplus \mathbb{F}_2 \langle \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^n \rangle.$$

---

fest und wählt nun  $u, v$  entsprechend, sodass

$$H^1(\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n) \cong \{0, u, v, u + v\}.$$

ist. Die Rechenregeln für  $u, v$  ergeben sich völlig analog, ebenfalls  $u^{n+1} = v^{n+1} = 0$ . Jetzt genügen ein paar Dimensionsabzählargumente und wieder der Isomorphiesatz.  $\square$

## 3 Der Satz von Hopf

### 3.1 Überblick

Nachdem wir nun einen (zugegebenermaßen recht langen) Abstecher in die algebraische Topologie gemacht haben, können wir nun eine nochmals etwas allgemeinere Version von [Satz 1.10](#) bzw. [Satz 1.11](#) geben, die direkt die eben entwickelte Sprache benutzt:

**Satz 3.1** (Hopf, 1940, 3. Variante). Sei  $G$  eine stetige Abbildung

$$G: \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}.$$

Nimm an, dass für  $t$  wie in [Korollar 2.49](#) sowie  $u, v$  wie in [Korollar 2.51](#) gilt, dass der Pullback gegeben ist durch:

$$G^*(t) = u + v \in H^1(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}).$$

Dann ist  $n$  eine Zweierpotenz.

Dass es sich hierbei tatsächlich um eine Verallgemeinerung handelt, zeigt uns:

**Lemma 3.2.** Eine stetige ungerade Abbildung  $g: S^{n-1} \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  induziert mittels [1.13](#) eine Abbildung

$$G: \mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}.$$

sodass  $G^*(t) = u + v$ .

Unser Hauptresultat ist nun ein einfaches Korollar:

**Satz 1.10** (Hopf, 1940, 1. Variante). Jede endlich-dimensionale, reelle Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  hat als Dimension eine Zweier-Potenz.

*Beweis.* Folgt als unmittelbare Implikationskette aus [Lemma 1.12](#), [Lemma 3.2](#) und [Satz 3.1](#).  $\square$

### 3.2 Beweise

Wir widmen uns nun den noch ausstehenden Beweisen:

*Beweis von Satz 3.1.* Wir nutzen natürlich die Isomorphismen

$$H^*(\mathbb{P}^{n-1}) \cong \mathbb{F}_2[t] / t^n \quad H^*(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}) \cong \mathbb{F}_2[u, v] / u^n, v^n.$$

die wir aus **Korollar 2.49** und **Korollar 2.51** kennen (man beachte die Reduktion der Exponenten um eins). Aus dem ersten Isomorphismus erkennt man insbesondere  $t^n = 0 \in H^n(\mathbb{P}^{n-1}) = 0$ , also ergibt sich mit dem Pullback  $G^*$ :

$$\begin{aligned} 0 = G^*(0) & \stackrel{t^n=0}{=} G^*(t^n) \\ & \stackrel{G^* \text{ ist Algebra-Morphismus}}{=} (G^*(t))^n \\ & \stackrel{\text{Voraussetzung}}{=} (u+v)^n \\ & = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k} \\ & \stackrel{u^n=0, v^n=0}{=} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} u^k v^{n-k} \end{aligned}$$

Das entscheidende ist nun jedoch, dass  $(u^k v^{n-k})_{1 \leq k \leq n-1}$  linear unabhängig sind<sup>19</sup>. Da die Summe allerdings Null ist, schließen wir daraus, dass

$$\forall 1 \leq k \leq n-1: \quad \binom{n}{k} = 0 \in \mathbb{F}_2[u, v] / u^n, v^n \iff \binom{n}{k} \text{ ist gerade.}$$

Wir haben also die 'komplizierten' Annahmen der Kohomologietheorie in eine rein zahlentheoretische Aussage übersetzt. Mit dem folgenden **Lemma 3.3** sind wir nun sofort fertig.  $\square$

**Lemma 3.3.** Sei  $n \in \mathbb{N}, n \neq 0$  und sei  $\forall 1 \leq k \leq n-1$ . Dann ist  $n$  eine Zweierpotenz.

*Beweis.* Schreibe  $n = 2^k \cdot l$  mit  $k, l \in \mathbb{N}$  und  $k$  maximal, d.h.  $l$  ist ungerade.

**Behauptung 1.**  $\binom{n}{2^k}$  ist ungerade.

*Unterbeweis.* Wir schreiben den Binomialkoeffizienten gemäß bekannten Regeln zunächst um.

$$\binom{n}{2^k} = \frac{n(n-1)\dots(n-2^k+1)}{2^k(2^k-1)\dots \cdot 1} = \frac{(2^k l)(2^k l-1)\dots(2^k(l-1)+1)}{2^k(2^k-1)\dots \cdot 1}.$$

Wir zeigen, dass die 'korrespondierenden' Faktoren jeweils gleich oft durch 2 teilbar sind, dazu stellen wir fest:

<sup>19</sup>Reine Algebra, intuitiv klar und hier nicht weiter ausgeführt.

- mod  $2^k$  ist  $2^k \cdot l - i \equiv -i \equiv 2^k - i$ .
- mod  $2^{k+1}$  ist  $2^k \cdot l - i \equiv 2^k - i \not\equiv 0$ . Hier benutzen wir, dass  $l$  ungerade ist. Insbesondere auch  $2^k - i \not\equiv 0$ .

Es ist also keiner der Faktoren (mindestens)  $k + 1$  mal durch 2 teilbar, aber sie lassen jeweils mod  $2^k$  den gleichen Rest, weswegen sie bereits gleich oft durch 2 teilbar sein müssen. Nun kürzen sich aber insgesamt alle Vorkommen der 2 gegenseitig, und der resultierende Term muss ungerade sein.<sup>20</sup> ■

Aus der Annahme folgt nun, dass  $2^k = 0$  oder  $2^k = n$  gelten muss. Ersteres ist offensichtlich falsch, also ist  $2^k = n$  und  $n$  eine Zweierpotenz wie gewünscht. □

*Beweis von Lemma 3.2.* Es sind  $G^*(t), u, v \in H^1(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1})$  Linearformen auf  $H_1(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1})$  (man mache sich das anhand von Definition 2.42 klar). Um  $G^*(t) = u + v$  zu zeigen, genügt es also zu zeigen, dass die Linearformen auf den Basiselementen von  $H_1(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1})$  die gleichen Werte annehmen. Aus Proposition\* 2.50 wissen wir jedoch, dass diese genau

$$|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|, \quad |\mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^1|.$$

sind. Wir wollen also  $u, v, G^*(t)$  auf diesen Homologieklassen auswerten. Hierzu geben wir zunächst einen Beweisablauf, wobei wir einige Details auf später verschieben:

Es ist nach Definition des Pullback

$$(G^*(t))(|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|) = t(G_*(|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|)).$$

Nun macht man sich klar, dass  $t \in H^1(\mathbb{P}^{n-1})$  nicht null ist, aber wegen  $H_1(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{F}_2$  nun bereits die Identitätsabbildung<sup>21</sup>  $H_1(\mathbb{P}^n) \rightarrow \mathbb{F}_2$  sein muss. Identifizieren wir alles mit  $\mathbb{F}_2$ , können wir  $t$  also vernachlässigen / 'kürzen', und interessieren uns nur für den Pushforward. Mit dem (vorgezogenen) Lemma 3.7 erhalten wir als Antwort

$$(G^*(t))(|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|) = 1, \quad (G^*(t))(|\mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^1|) = 1.$$

Um  $u, v$  auf den beiden Basiselementen auszuwerten, hilft uns Lemma 3.10. Ausnutzen der Linearität ergibt dann sofort

$$\begin{aligned} (u + v)(|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|) &= u(|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|) + v(|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|) \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

sowie völlig analog

$$(u + v)(|\mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^1|) = 0 + 1 = 1.$$

<sup>20</sup>Das braucht genau genommen die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung. Klassiker.

<sup>21</sup>Strenggenommen nicht ganz, weil  $H_1(\mathbb{P}^n) \neq \mathbb{F}_2$ , sondern nur  $\cong \mathbb{F}_2$ , wir sollen uns aber nicht an dieser Identifikation stören.

Damit nehmen  $G^*(t)$  sowie  $u + v$  auf den Basiselementen von  $H_1(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1})$  die gleichen Werte an und sind somit die gleichen Linearformen. Es folgt also

$$G^*(t) = u + v.$$

- wenn wir die Beweise von [Lemma 3.7](#) und [Lemma 3.10](#) noch erbringen, die eher technischer Natur sind.  $\square$

Um [Lemma 3.7](#) zu beweisen, benötigen wir zunächst das folgende Kriterium<sup>22</sup>:

**Definition 3.4** (Schleife, Hebung). Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- Eine **Schleife**  $w$  in  $X$  ist hierbei eine stetige Abbildung  $w: [0, 1] \rightarrow X$  mit  $w(0) = w(1)$ , d.h. ein geschlossener Weg
- Eine Hebung  $\tilde{w}$  von  $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^n$  ist hierbei ein Weg  $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow S^n$ , sodass  $p \circ \tilde{w} = w$ .

**Proposition\* 3.5.** Jeder Weg  $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^n$  hat eine eindeutige Hebung  $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow S^n$ .

**Lemma\* 3.6.** Die Homologieklass  $|w| \in H_1(\mathbb{P}^n)$  einer Schleife  $w$  ist genau dann Null, wenn ihre Hebung nach  $S^n$  eine Schleife ist.

**Lemma 3.7.** Sei  $G$  wie in [Lemma 3.2](#). Dann gilt:

$$G_*(|\mathbb{P}^1 \times \text{Punkt}|) = G_*(|\text{Punkt} \times \mathbb{P}^1|) = |\mathbb{P}^1|.$$

*Beweis.* Nach der Definition des **Pushforward** müssen wir  $G(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0)$  bestimmen.

Wir stellen hierzu zunächst fest, dass  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0$  wegen  $|\mathbb{P}^0| = 1$  für eine geeignete Schleife  $w: [0, 1] \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  als  $w \times c_{\mathbb{P}^0}$  dargestellt werden kann ( $c_{\mathbb{P}^0}$  ist die Funktion, die konstant den Wert  $\mathbb{P}^0$  annimmt - es handelt sich hierbei tatsächlich um einen einzelnen Punkt). Nach [Lemma\\* 3.6](#) lässt sich  $w$  nun eindeutig zu einem Weg  $\tilde{w}: [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$  heben, für ein Urbild  $c$  von  $|\mathbb{P}^0| \in \mathbb{P}^{n-1}$  ist dann  $\tilde{w} \times c$  ein Weg in  $S^{n-1} \times S^{n-1}$ , der  $\tilde{w} \times c_{\mathbb{P}^0}$  hebt.

Wir stellen nun fest, dass  $\tilde{w}$  keine Schleife ist - sonst folgt aus [Lemma\\* 3.6](#), dass die Schleife  $\tilde{w}$  die triviale Homologieklass induziert, gleiches gilt dann für  $\tilde{w} \times \mathbb{P}^0$ , aber da es sich bei  $|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|$  um ein Basiselement von  $H_1(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1})$  handelt ([Korollar 2.51](#)), kann dies nicht zutreffen.

<sup>22</sup>Auch, wenn wir dieses hier ohne jeglichen Beweis wiedergeben, sei angemerkt, dass dies grundlegende Resultate der Überlagerungstheorie sind. Beweise finden sich in jedem gängigen Buch zur algebraischen Topologie.

Da nun  $p(\tilde{w}(0)) = w(0) = w(1) = p(\tilde{w}(1))$ , und  $p$  jedoch zweiblättrig ist (d.h. Punkte aus  $\mathbb{P}^{n-1}$  haben in  $S^{n-1}$  genau 2 Urbilder), und  $\tilde{w}(0) \neq \tilde{w}(1)$  muss folglich  $\tilde{w}(0) = -\tilde{w}(1)$  gelten - denn  $p$  identifiziert ja gerade Antipoden miteinander.

Mittels des kommutativen Diagramms, das wir in **Beobachte 1.13** benutzt haben, um  $G$  zu definieren, ist nun  $G(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0)$  als Schleife gegeben durch

$$\begin{aligned} G \circ (w \times c_{\mathbb{P}^0}) &= G \circ (p \times p) \circ (\tilde{w} \times c) \\ &= p \circ g \circ (\tilde{w} \times c) \end{aligned}$$

Da  $g \circ (\tilde{w} \times c): [0, 1] \rightarrow S^{n-1}$  abbildet, handelt es sich bei  $g \circ (\tilde{w} \times c)$  also um eine Hebung von  $G \circ (w \times c_{\mathbb{P}^0})$ . Da  $g$  ungerade ist, ist nun aber

$$\begin{aligned} (g \circ (\tilde{w} \times c))(0) &= g(\tilde{w}(0), c) \\ &= g(-\tilde{w}(1), c) \\ &= -g(\tilde{w}(1), c) \\ &= -(g \circ (\tilde{w} \times c))(1) \end{aligned}$$

und damit haben wir gezeigt, dass es sich bei dieser Hebung ebenfalls *nicht* um eine Schleife handelt. Es folgt also, mit einer erneuten Anwendung von **Lemma\* 3.6**, dass die Schleife  $G \circ (w \times c_{\mathbb{P}^0})$  ebenfalls eine nichttriviale Homologiekategorie induziert - und damit auch  $G(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0)$ . Also ist

$$G_*(|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|) = 1.$$

wie zu zeigen war.

Der Beweis für  $\mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^1$  erfolgt völlig analog. □

Auch für den Beweis von **Lemma 3.10** benötigen wir noch ein kleines Resultat:

**Lemma\* 3.8.** Sei  $X$  eine kompakte, wegzusammenhängende Mannigfaltigkeit. Ist  $x \in H_{n-p}(X)$  und  $y \in H_p(X)$ , so

$$(D(x))(y) = x \cdot y.$$

wobei auf der rechten Seite das Schnittprodukt  $x \cdot y \in H_0(X) \cong \mathbb{F}_2$  als Element von  $\mathbb{F}_2$  zu betrachten ist.

**Bemerkung 3.9.** Man beachte einerseits, dass  $D(x) \in H^p(X)$ , die linke Seite also wohldefiniert ist, und zudem, dass wegen dem Addieren der Kodimensionen  $x \cdot y \in H_{n-(p+n-p)}(X) = H_0(X) \cong \mathbb{F}_2$ , weil  $X$  wegzusammenhängend ist.

Zudem sei angemerkt, dass **Lemma\* 3.8** nicht wirklich ein Lemma, sondern

eher eine Definition ist, wenn wir uns die Poincaré-Dualität und Kohomologie besser angesehen hätten.

**Lemma 3.10.** Betrachte  $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}$  und seien  $u, v$  wie in [Korollar 2.51](#). Dann ist:

$$\begin{aligned} u(|\mathbb{P}^1 \times \text{Punkt}|) &= 1 & u(|\text{Punkt} \times \mathbb{P}^1|) &= 0 \\ v(|\mathbb{P}^1 \times \text{Punkt}|) &= 0 & v(|\text{Punkt} \times \mathbb{P}^1|) &= 1 \end{aligned}$$

*Beweis.* Eine Anwendung von [Lemma\\* 3.8](#) führt nun recht direkt zum Ziel, indem wir uns mittels [Korollar 2.51](#) ins Gedächtnis rufen, dass  $u = D(|\mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^{n-1}|)$  definiert war. Dann ergibt sich nämlich sofort:

$$\begin{aligned} u(|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|) &= (D(|\mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^{n-1}|))(|\mathbb{P}^1| \times \mathbb{P}^0) \\ &= |\mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^{n-1}| \cdot |\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0| \\ &= |\mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^0| \\ &= 1 \end{aligned}$$

sowie

$$u(|\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^0|) = |\mathbb{P}^{n-2} \times \mathbb{P}^{n-1}| \cdot |\mathbb{P}^0 \times \mathbb{P}^1| = |\emptyset| = 0.$$

Die Aussagen über  $v$  ergeben sich völlig analog. □

## 4 Reduktion auf $n = 1, 2, 4, 8$

In diesem Kapitel wollen wir uns (noch größer als bisher) den 1-2-4-8-Satz erarbeiten, die wir uns kurz wieder ins Gedächtnis rufen.

**Satz 1.8** (1-2-4-8 Satz, Kervaire, Milnor, 1958, 1. Variante). Ist  $\mathcal{A}$  eine  $n$ -dimensionale, reelle Divisionsalgebra, so ist  $n = 1, 2, 4, 8$ .

**Korollar 1.9.** Ist  $\mathcal{A}$  eine endlich-dimensionale, reelle Divisionsalgebra mit EINSELEMENT, so ist  $\mathcal{A}$  isomorph zu  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$  oder  $\mathbb{O}$ .

**Warnung.** Dieses Korollar ist ziemlich sicher falsch und wird noch einmal überarbeitet.

*Beweis (Ansatz skizziert).* Man erhält aus der Existenz des Einselements  $e$ , dass wir mit  $\text{Re}$  einen linearen Unterraum von  $\mathcal{A}$  gefunden haben. Für  $n = 1$  sind wir also bereits fertig.

Man konstruiert sich nun, ähnlich wie im Seminar oft geschehen, Quadratwurzel(n) der  $-1$  und baut aus diesen eine Orthonormalbasis. Danach muss man

im Wesentlichen nach den möglichen Produkten fallunterscheiden, bis man zum Ziel gelangt. Hierzu reicht es,  $n = 2, 4, 8$  zu betrachten nach [Satz 1.8](#), weswegen die Fallunterscheidung endlich ist.  $\square$

Um einen Beweis von [Satz 1.8](#) skizzieren zu können erarbeiten wir uns im folgenden zunächst mehr Begrifflichkeiten.

## 4.1 Vektorbündel

**Definition 4.1** (Vektorbündel). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Ein  $n$ -dimensionales **Vektorbündel** über  $X$  ist ein topologischer Raum  $E$  zusammen mit einer stetigen Abbildung  $p: E \rightarrow X$ , so dass:

- jede *Faser* ist<sup>23</sup> ein  $n$ -dimensionaler Vektorraum, insbesondere:

$$E_x = p^{-1}(x) \cong \mathbb{R}^n.$$

- $p$  ist **lokal trivial**, d.h. um jeden Punkt  $x \in X$  gibt es eine Umgebung  $x \in U$  und einen Homöomorphismus  $\varphi$  über  $U$ .

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\varphi]{\cong} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \text{pr}_U & \swarrow p \\ & & U \end{array}$$

sodass für jedes  $x \in U$  die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \hookrightarrow \{x\} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} p^{-1}(\{x\}).$$

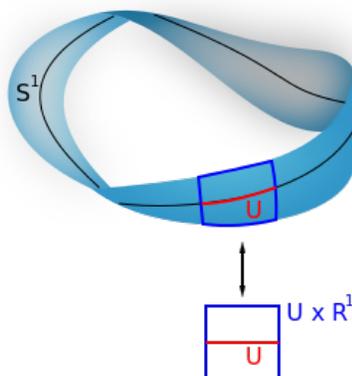
eine lineare Abbildung (= Isomorphismus da bijektiv) ist.

**Beispiel 4.2** (Vektorbündel). Die einfachste Art von Vektorbündel sind die trivialen Bündel  $E := X \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\text{pr}_X} X$ , die sich über jedem topologischen Raum  $X$  bilden lassen. Die Fasern sind dann offensichtlich isomorph zu  $\mathbb{R}^n$ , und die lokale Trivialität ist sogar global: Wir können  $U = X$  und  $\varphi = \text{id}$  wählen.

In der Tat beschreibt die Bedingung der lokalen Trivialität nichts anderes, dass *jedes* Vektorraumbündel zumindest *lokal* so aussieht (mit einem 'sinnvollen' Konzept von Vektorbündelmorphismen).

Etwas spannender (weil nicht trivial) ist das bekannte *Möbiusband*, zu sehen in [Abbildung 9](#), das ein eindimensionales Vektorbündel über  $S^1$  darstellt.

<sup>23</sup>Es sei angemerkt, dass die Faser selbst bereits eine Vektorraumstruktur besitzen muss, die Teil des Datum des Bündels ist. Es reicht nicht, dass diese Homöomorph zu  $\mathbb{R}^n$  ist.

Abbildung 9: Möbiusband als eindimensionales Vektorbündel über  $S^1$ 

Das Möbiusband ist hierbei ohne Rand aufzufassen, d.h. als Quotient von  $[0, 1] \times (-1, 1)$ , indem wir  $(0, x) \sim (1, -x)$  verkleben. In einer kleinen offenen Umgebung von  $S^1$  sieht dieses dann aus wie  $(a, b) \times (-1, 1) \cong^{24} (a, b) \times \mathbb{R}$ , also das triviale Bündel.

Im Wesentlichen will man sich Vektorbündel auch so vorstellen: In jedem Punkt ist ein 'angehängter' Vektorraum zu finden, sodass das Ganze lokal trivial aussieht.

Ein weiteres Beispiel ist das *Tangentialbündel* einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit. Hier ordnet man jedem Punkt seinen Tangentialraum zu, die Vereinigung all dieser Tangentialräume, d.h. alle Tangentialvektoren der Mannigfaltigkeit zusammen bilden das Tangentialbündel. Bei der Projektion  $p: E \rightarrow X$  schicken wir einen solchen Vektor auf seinen Start / Berührungspunkt.

#### 4.1.1 Hopfsche Bündel

Warum interessieren wir uns nun für Vektorbündel? Es stellt sich heraus, dass man aus reellen Divisionsalgebren sogenannte *Hopfsche Bündel*, Vektorbündel über den Sphären, bauen kann.

**Satz und Definition 4.3** (Hopfsche Bündel). Aus einer reellen,  $n$ -dimensionalen Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  kann man<sup>25</sup> ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel über der  $S^n$  konstruieren. Wir notieren dieses Bündel mit  $E_{\mathcal{A}}$  und nennen es das **Hopfsche Bündel** der Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$ .

<sup>24</sup>Bekanntermaßen ist  $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$ , z.B. mittels  $x \mapsto \tan\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ . Man kann natürlich auch direkt mit  $\mathbb{R}$  arbeiten, dann lässt sich das Möbiusband aber nicht so schön überschneidungsfrei im  $\mathbb{R}^3$  einbetten und darstellen.

**Beispiel 4.4** (Hopfsches Bündel über  $\mathbb{R}$ ). Da  $\mathbb{R}$  eine reelle Divisionsalgebra ist, können wir das Hopfsche Bündel  $E_{\mathbb{R}}$  konstruieren. Es stellt sich heraus, dass wir genau das Möbiusband aus **Abbildung 9** erhalten.

Der Rest dieses Abschnitts widmet sich nun noch der genauen Konstruktionsweise, die in **Satz und Definition 4.3** verschwiegen wurde. Da dieses für das weitere Verständnis nicht weiter relevant ist, sei zunächst empfohlen, mit **Unterabschnitt 4.2** fortzufahren.

**Idee** (Konstruktion von Vektorbündeln über  $S^n$ ). Ein solches Bündel  $E$  über  $S^n$  ist lokal trivial. Durch Zusammenkleben dieser trivialen Umgebungen können wir<sup>26</sup> die Sphäre in die obere und untere Hemisphäre  $H^+$  und  $H^-$  aufteilen und auf diesen von trivialen Bündeln  $E^+ := H^+ \times \mathbb{R}^n$  sowie  $E^- := H^- \times \mathbb{R}^n$  ausgehen.

Die beiden trivialen Bündel müssen nun 'nur noch' entlang von  $H^+ \cap H^- = S^{n-1}$  entlang verklebt, d.h. identifiziert werden. Dazu 'muss es' insbesondere für jeden Punkt  $x \in S^{n-1}$  einen Isomorphismus zwischen den zugehörigen Vektorräumen  $p_+^{-1}(x) \subseteq E^+$  und  $p_-^{-1}(x) \subseteq E^-$  geben.

**Lemma und Definition 4.5.** Sei  $f: S^{n-1} \rightarrow GL(n)$  eine stetige Abbildung. Dann lässt sich aus dieser ein  $n$ -dimensionales Vektorbündel über  $S^n$  konstruieren, das wir mit  $E_f$  notieren.

*Beweis (teilweise skizziert).* Wie angemerkt setzen wir  $H^+, H^-$  als die respektive obere und untere Hemisphäre von  $S^n$ , und definieren die trivialen Bündel  $E^+ := H^+ \times \mathbb{R}^n$  sowie  $E^- := H^- \times \mathbb{R}^n$ . Wir bilden nun den Quotienten der disjunkten Vereinigung der Bündel, induziert von der Äquivalenzrelation

$$\forall x \in S^{n-1} \forall v \in \mathbb{R}^n: \quad E^+ \ni (x, v) \sim (x, (f(x))(v)) \in E^-.$$

d.h.

$$E := H^+ \amalg H^- / (x, v) \sim (x, (f(x))(v)).$$

Die Projektion  $p: E \rightarrow S^n$  ist gegeben durch  $p(x, v) = x$ . Diese ist wohldefiniert, weil identifizierte Punkte des Quotienten gleiches Bild unter  $p$  haben. Nun erkennt man:

- Das Urbild von  $x \in S^n$  unter  $p$  ist für  $x \notin H^+ \cap H^-$  einfach das Urbild unter  $p_+^{-1}$  bzw.  $p_-^{-1}$ , also isomorph zu  $\mathbb{R}^n$  nach Definition. Für  $x \in S^{n-1}$  stellt man fest, dass das Urbild mit  $f := f(x) \in GL(n)$  nun isomorph ist zu

$$\mathbb{R}^n \amalg \mathbb{R}^n / v \sim f(v) \cong \mathbb{R}^n.$$

<sup>25</sup>Näheres später, so ist das natürlich keine wirkliche Definition.

<sup>26</sup>Kann man tatsächlich immer, werden wir aber nicht beweisen. Brauchen wir eigentlich auch gar nicht, weil wir nur eine Heuristik schildern wollen.

Da  $f$  ein Isomorphismus zwischen den 'zwei Kopien' von  $\mathbb{R}^n$  ist, stellen wir leicht fest, dass es sich bei dem Quotienten auch um  $\mathbb{R}^n$  handelt.

- Lokal um Punkte  $x \notin S^{n-1}$  ist das Bündel klarerweise trivial, wähle einfach eine Umgebung, die  $S^{n-1}$  nicht schneidet, dann reduzieren wir auf  $H^+$  oder  $H^-$ .
- Auf  $x \in S^{n-1}$  wählen wir jetzt eine kleine Umgebung, z.B. die Hemisphäre, deren Nordpol  $x$  ist. Wir definieren dann

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{l} H \times \mathbb{R}^n \longrightarrow p^{-1}(H) \\ (x, v) \longmapsto \begin{cases} (x, v) \in H^+ \times \mathbb{R}^n & x \in H^+ \setminus H^- \\ (x, v) \in H^- \times \mathbb{R}^n & x \in H^- \setminus H^+ \\ \{(x, v), (x, (f(x))(v))\} & x \in H^- \cap H^+ \end{cases} \end{array} \right.$$

Im dritten Fall haben wir hierbei alle Elemente der zugehörigen Äquivalenzklasse angegeben. Man muss nun noch überprüfen:

- $\varphi$  ist wohldefiniert
- $\varphi$  ist stetig und ein Homöomorphismus
- $\varphi$  ist eine Abbildung über  $H$  (trivial)
- Für feste  $x \in H$  ist  $\{x\} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\varphi} p^{-1}(\{x\}) \cong \mathbb{R}^n$  ein Vektorraumisomorphismus.

Da das auch etwas technisch ist, sparen wir uns die Details. □

Es verbleibt zu klären, wie wir eine solche stetige Abbildung  $f: S^{n-1} \rightarrow GL(n)$  aus unserer Divisionsalgebra erhalten:

**Lemma 4.6.** Eine  $n$ -dimensionale Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  induziert durch Multiplikation eine stetige Abbildung

$$f : \left\{ \begin{array}{l} S^{n-1} \longrightarrow GL(n) \\ x \longmapsto L_x : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ y \longmapsto xy \end{array} \right. \end{array} \right.$$

*Beweis (teilweise skizziert).* Wir müssen vor allem prüfen, dass Linksmultiplikation mit  $x$  ein Automorphismus von  $\mathbb{R}^n$  ist. Da  $0 \neq x \in S^{n-1}$  folgt jedoch aus der Definition einer Divisionsalgebra sofort, dass  $L_x$  eine injektive Abbildung ist. Aus der Distributivität erhalten wir, dass  $L_x$  linear ist, und da  $\mathbb{R}^n$  endlich-dimensional ist ist  $L_x$  bekanntermaßen auch surjektiv, d.h.  $L_x \in GL(n)$  wie gewünscht.

Dass die Zuordnung  $x \mapsto L_x$  stetig ist, beweisen wir nicht im Detail (dazu müsste man erstmal eine Topologie / Norm auf  $GL(n)$  definieren), dass sich die

Abbildung  $L_x$  für 'kleine Änderung von  $x$ ' aber nur 'wenig' verändert, d.h. stetig ist, sollte klar sein, weil die Multiplikation auf  $\mathcal{A}$  selbst stetig ist.  $\square$

## 4.2 Stiefel-Whitney-Klassen

Mit den Hopfschen Bündeln unserer Divisionsalgebren im Hinterkopf wollen wir nun Vektorbündel über Mannigfaltigkeiten weiter charakterisieren / untersuchen.

**Definition 4.7.** Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit. Für jedes Vektorrääumbündel  $p: E \rightarrow X$  gibt es die sogenannten **charakteristischen Kohomologieklassen** von  $E$ ,

$$w_i(E) \in H^i(X).$$

die man auch **Stiefel-Whitney-Klassen** des Bündels nennt.

In Bezug auf die Hopfschen Bündel erhalten wir also für eine  $n$ -dimensionale Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  die Klassen  $w_i(E_{\mathcal{A}}) \in H^i(S^n)$ . Aus der **Poincaré-Dualität** und **Beispiel 2.20** wissen wir jedoch, dass  $H^i(S^n) = 0$  für  $i \neq 0, n$  ist, das sind also die einzig interessanten (nicht bei allen Bündeln über  $S^n$  offensichtlich gleich) Stiefel-Whitney-Klassen des Bündels. Über  $w_n(E_{\mathcal{A}})$  können wir tatsächlich auch feststellen:

**Proposition\* 4.8.** Ist  $E_{\mathcal{A}}$  das Hopfsche Bündel der Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  mit Dimension  $n$ , so ist

$$w_n(E_{\mathcal{A}}) = 1.$$

Insbesondere erhalten wir nun als Zwischenstand:

**Wenn es eine reelle Divisionsalgebra  $\mathcal{A}$  der Dimension  $n$  gibt, dann gibt es ein Vektorbündel  $E$  über  $S^n$ , für das  $w_n(E) = 1$  gilt.**

Der nun alles erschlagende Satz von KERVAIRE und MILNOR lautet in seiner allgemeineren Fassung nun wie folgt:

**Satz 4.9** (1-2-4-8 Satz, Kervaire, Milnor, 1958, 2. Variante). Ist  $E$  ein Vektorbündel über  $S^n$  und ist  $w_n(E) = 1$ , so ist  $n = 1, 2, 4, 8$ .

*Beweis.* Angedeutet in **Bemerkung 4.3**.  $\square$

*Beweis von Satz 1.8.* Die 1. Variante des 1-2-4-8 Satzes folgt nun unmittelbar aus **Satz 4.9**:

Sei  $\mathcal{A}$  eine solche  $n$ -dimensionale Divisionsalgebra. Das Hopfsche Bündel  $E_{\mathcal{A}}$  erfüllt nach **Proposition\* 4.8** die Bedingung  $w_n(E_{\mathcal{A}}) = 1$  und damit die Voraussetzung zu **Satz 4.9**. Es folgt  $n = 1, 2, 4$  oder  $8$ .  $\square$

### 4.3 Klassifikation der Vektorbündel

**Bemerkung 4.10.** Dieses Kapitel war nicht (offizieller) Teil meines Vortrags, wurde aber vorbereitet. Es ist noch nicht weiter ausgearbeitet, etwaige Inhalte wurden einfach von den Folien übernommen.

Letztendlich haben wir die Hauptaussagen nun (mit vielen Lücken) auf [Satz 4.9](#) zurückgeführt. Im Folgenden wollen wir grob skizzieren, wie man diesen aus dem *Bottischen Periodizitätssatz* gewinnen kann.

**Definition 4.11.** Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit, und seien  $p: E \rightarrow X$  sowie  $q: F \rightarrow X$  Vektorbündel. Dann ist ihre **direkte Summe** definiert als

$$E \oplus F := \{(e, f) \in E \times F \mid p(e) = q(f)\}.$$

und ebenfalls wieder ein Vektorbündel über  $X$  mittels der Projektion

$$r : \begin{cases} E \oplus F & \longrightarrow & X \\ (e, f) & \longmapsto & p(e) = q(f) \end{cases}$$

**Proposition 4.12.** Die Menge  $N(X)$  der Isomorphieklassen von Vektorbündeln über  $X$  wird dadurch zu einem *abelschen Monoiden*.

**Definition 4.13.** Durch Hinzufügen von Inversen erhält man aus  $N(X)$  die abelsche Gruppe  $KO(X)$ .

**Proposition\* 4.14.** Es ist

$$KO(X) \cong \mathbb{Z} \times \tilde{KO}(X).$$

für einen geeigneten Ring  $\tilde{KO}(X)$ , der den *nichttrivialen Anteil* eines Vektorbündels beschreibt.

**Satz\* 4.15** (Bottischer Periodizitätssatz).

$$\begin{aligned} \tilde{KO}(S^1) = \tilde{KO}(S^2) = \mathbb{Z}/2 & & \tilde{KO}(S^3) = 0 & & \tilde{KO}(S^4) = \mathbb{Z} \\ \tilde{KO}(S^5) = \tilde{KO}(S^6) = \tilde{KO}(S^7) = 0 & & \tilde{KO}(S^8) = \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Die Erzeuger in den Dimensionen 1, 2, 4, 8 sind durch die Hopfschen Bündel von  $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$  gegeben.

**Definition 4.16.** Es gibt eine Produktabbildung

$$\boxtimes: \tilde{K}O(S^n) \times \tilde{K}O(S^m) \longrightarrow \tilde{K}O(S^{n+m}).$$

**Satz\* 4.17** (Bott). Es ist  $\tilde{K}O(S^n) \cong \tilde{K}O(S^{n+8})$  mittels

$$[E] \mapsto [E] \boxtimes \mathbb{O}.$$

wobei  $[E] \in KO(X)$  die Klasse von  $E$  in  $\tilde{K}O(X)$  bezeichne.

**Satz\* 4.18.** Für  $E \in \tilde{K}O(S^n)$  beliebig ist

$$w_{n+8}([E] \boxtimes \mathbb{O}) = 0.$$

**Korollar 4.19.** Für  $n > 8$  und  $E \in KO(S^n)$  ist  $w_n(E) = 0$ .

## Bildquellen

- [Aug] AugPi. *Boys Surface Top View*. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:BoysSurfaceTopView.PNG>.
- [Kri] Krishnavedala. *Homology cycles on a torus*. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torus\\_cycles.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torus_cycles.svg).
- [Leo] Leonid\_2. *Torus*. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torus.svg>.
- [Rok] RokerHRO. *Polar stereographic projections*. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polar\\_stereographic\\_projections.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polar_stereographic_projections.jpg).

## Literatur

- [al92] Ebbinghaus et al. *Zahlen*. Springer, 1992. ISBN: 978-3-540-55654-1.
- [Dar10] Erik Darpö. „Some modern developments in the theory of real division algebras“. In: (2010). DOI: [10.3176/proc.2010.1.09](https://doi.org/10.3176/proc.2010.1.09).
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0-521-79540-0. URL: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Jän01] Klaus Jänich. *Topologie*. Springer, 2001. ISBN: 978-3-540-41284-7. DOI: [10.1007/978-3-662-10575-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-10575-7).
- [Kas21] Daniel Kasprowski. *Einführung in die Geometrie und Topologie*. Vorlesungsnotizen. 2021. URL: [https://kesslermaximilian.github.io/LectureNotesBonn/2021\\_Topologie.pdf](https://kesslermaximilian.github.io/LectureNotesBonn/2021_Topologie.pdf).
- [Mun18] James Munkres. *Topology (Classic Version)*. Pearson, 2018. ISBN: 978-0131816299.