Was kommt nach $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$?

Maximilian Keßler

Mathecamp 2021

15. August 2021

Zahlen	Menge	Operationen	Begriff
$0, 1, 2, 3 \ldots$	$\mathbb{N}$	$+, \cdot$	Halbring
$-1, -2, \ldots$	$\mathbb{Z}$	$+, -, \cdot$	Ring
$\frac{1}{4}, \frac{42}{1729}, \frac{21}{7}, \ldots$	$\mathbb{Q}$	$+, -, \cdot, \div$	Körper
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \tau, \pi, e,$	$\mathbb{R}$	'Limiten'	vollständig
$i, e^{i\varphi}, \sqrt{-42}$	$\mathbb{C}$	'Polynome lösen'	algebraisch abgeschlossen

Definition

Ein kommutativer **Halbring** R ist eine Menge mit Verknüpfungen $+, \cdot$ und Elementen $0, 1$, sodass

- $+$ ist **kommutativ** und **assoziativ**
- $0 + a = a + 0 = a$

$\left.\right\}$ $(R, +)$ ist komm. Monoid

- $\cdot$ ist **kommutative** und **assoziativ**
- $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

$\left.\right\}$ $R, \cdot$ ist komm. Monoid

- $+$ und $\cdot$ verhalten sich **distributiv**, d.h.

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \qquad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c).$$

- $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ (technisch)

Definition

Ein kommutativer **Ring** R ist ein kommutativer Halbring, sodass

- Es gibt additive Inverse $-r$ zu jedem $r \in R$, d.h.

$$r + (-r) = 0.$$

Definition

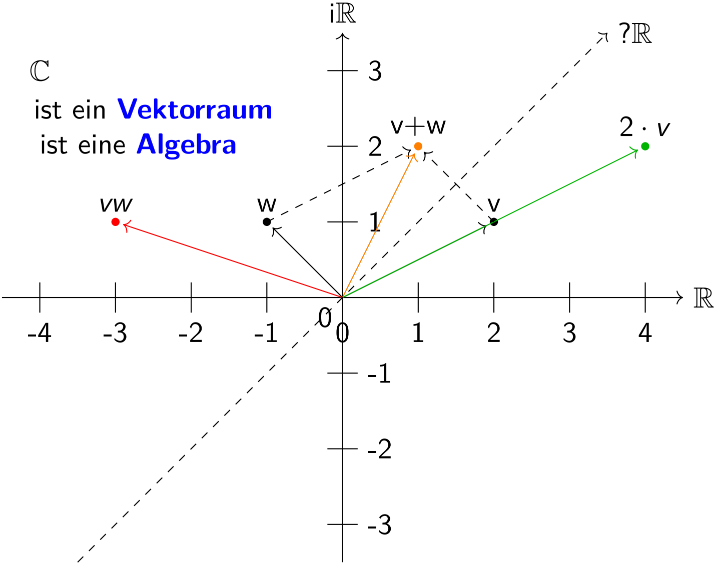
Ein **Körper** ist ein kommutativer Ring, sodass zusätzlich gilt:

- Es gibt multiplikative Inverse r^{-1} zu jedem $0 \neq r \in R$, d.h.

$$r \cdot r^{-1}.$$

$\mathbb{C}$

ist ein **Vektorraum**
ist eine **Algebra**



Definition

Ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist eine kommutative Gruppe (Monoid mit Inversen), zusammen mit einer **Skalarmultiplikation**

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V.$$

sodass für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $v, w \in V$ gilt:

- $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v$
- $1 \cdot v = v$
- $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
- $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot w$

Example

Typischerweise $\mathbb{R}^n$ mit komponentenweiser Addition und Skalarmultiplikation, übliches rechnen mit 'Vektoren'.

Definition (Algebra)

Eine **Algebra** über $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum V, zusammen mit einer *Multiplikation* $V \times V \to V$, sodass für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $x, y, z \in V$ gilt:

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz, \qquad x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz.$$

Example

- $\mathbb{R}$ ist eine reelle Algebra
- $\mathbb{C}$ ist eine reelle Algebra.

Warnung

Wir haben nicht gefordert, dass die Multiplikation assoziativ oder kommutativ ist, sondern nur die Distributivität.

Example

Betrachte wieder $\mathbb{R}^2$, einen reellen Vektorraum. Um $\mathbb{R}^2$ zu einer Algebra zu machen, müssen wir ein Produkt definieren, wir machen Folgendes:

$$v \cdot w := 0.$$

Das erfüllt alle Voraussetzungen und ist somit eine reelle Algebra!

Definition

Eine **Divisionsalgebra** ist eine Algebra, sodass

$$v \cdot w = 0 \implies v = 0 \text{ oder } w = 0.$$

Zwischenstand

- Von $\mathbb{N}$ zu $\mathbb{R}$ 'füllen' wir den Zahlenstrahl mit den 'fehlenden' Zahlen, die wir haben wollen.
- $\mathbb{R}$ ist schon 'sehr gut', denn $\mathbb{R}$ ist nun ein vollständiger Körper.
- Von $\mathbb{R}$ zu $\mathbb{C}$ *erweitern* wir die Dimension, um 'mehr' Zahlen zu bekommen, mit denen wir rechnen können.
- Dimensionen zu erhöhen führt zu den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$
- Jetzt wollen wir Vektoren multiplizieren: Wir machen den Vektorraum zu einer Algebra
- Um 'Blödsinn' loszuwerden, betrachten wir Divisionsalgebren.

Theorem (2-Quadrate-Satz von Euler)

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = .$$

Frage

Gibt es weitere, reelle Divisionsalgebren?

Frage

Welche Multiplikation macht den $\mathbb{R}^3$ zu einer Divisionsalgebra?

Frage

Gibt es eine Multiplikation, die den $\mathbb{R}^3$ zu einer Divisionsalgebra.

Frage

Gibt es eine Multiplikation, die den $\mathbb{R}^4$ zu einer Divisionsalgebra macht?

Sir William Rowan Hamilton

Definition (Quaternionen, 1843)

Betrachte $\mathbb{R}^4$. Seien $1, i, j, k$ die Einheitsvektoren. Definiere die Multiplikation durch

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \qquad ij = -ji = k \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j.$$

Proposition

Das definiert eine Divisionsalgebra, die wir mit $\mathbb{H}$ notieren.

Example

$$\begin{aligned} & (1+2j-3k)(2-i+k) \\ &= (2-i+k) + 2j(2-i+k) - 3k(2-i+k) \\ &= (2-i+k) + (4j-2k+2i) - (6k-3j-3) \\ &= 5 - i + 7j - 7k \end{aligned}$$

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

Fact

$\mathbb{H}$ *ist assoziativ, aber **nicht** kommutativ.*

Definition

Der **Imaginärraum** $\operatorname{Im}\mathbb{H}$ sind diejenigen Quaternionen, die als $\alpha i + \beta j + \gamma k$ geschrieben werden können.

Definition (Kreuzprodukt)

Setze für $u, v \in \operatorname{Im}\mathbb{H}$

$$u \times v := \frac{1}{2}(uv + vu).$$

Frage

Gibt es eine *endlich-dimensionale* *kommutative, reelle Divisionsalgebra, die nicht* $\mathbb{R}$ *oder* $\mathbb{C}$ *ist?*

Example

Betrachte $\mathbb{C}$, und definiere eine neue Multiplikation durch

$$\boxdot : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (a, b) & \longmapsto & \overline{a \cdot b} \end{array} \right.$$

- $1 \cdot i = -i$
- $1 \cdot (1 \cdot i) = 1 \cdot (-i) = -1 \cdot i = i$
- $(1 \cdot 1) \cdot i = 1 \cdot i = -i$

Frage

Gibt es eine endlich-dimensionale *kommutative, reelle Divisionsalgebra, die*

- *ein Einselement hat*
- *assoziativ ist*

und nicht $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist?

Theorem (Hopf, 1940)

Jede endlich-dimensionale, *reelle,* KOMMUTATIVE *Divisionsalgebra $\mathcal{A}$ ist höchstens zweidimensional.*

Corollary

Jede endlich-dimensionale, *reelle, kommutative Divisionsalgebra $\mathcal{A}$ mit* EINSELEMENT *ist isomorph zu $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.*

Theorem (Frobenius, 1877)

Jede endlich-dimensionale, *reelle,* ASSOZIATIVE *Divisionsalgebra ist isomorph zu* $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ *oder* $\mathbb{H}$.

- Es gibt keine Divisionsalgebren ungerader Dimension
- Die einzigen endlich-dimensionalen, kommutativen Divisionsalgebren mit Einselement sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}$.
- Die einzigen endlich-dimensionalen, assoziativen Divisionsalgebren sind $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$.

Was muss ich an γ fordern?

Definition

Sei $\mathcal{A}$ eine reelle Divisionsalgebra, und $\gamma\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine Linearform. Dann betrachte auf

$$(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1 b_1 - \gamma(b_2) a_2, a_2 \gamma(b_1) + b_2 a_1).$$

Mit dieser Verdopplung gelangt man schrittweise

- Von $(\mathbb{R}, \mathrm{id})$ zu $(\mathbb{C}, \gamma_{\mathbb{C}})$
- Von $(\mathbb{C}, \gamma_{\mathbb{C}})$ zu $(\mathbb{H}, \gamma_{\mathbb{H}})$
- Von $(\mathbb{H}, \gamma_{\mathbb{H}})$ zu $(\mathbb{O}, \gamma_{\mathbb{O}})$

Proposition

*Die **Oktonionen** bilden eine Divisionsalgebra.*

Warnung

Die Oktonionen sind weder kommutativ noch assoziativ.

Frage

Was kommt nach $\mathbb{O}$?

Proposition

*Die **Sedenionen** $\mathbb{S}$, die durch Verdopplung aus $\mathbb{O}$ hervorgehen, sind keine Divisionsalgebra.*

Definition

Eine Algebra $\mathcal{A}$ ist **alternativ**, wenn für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt:

$$x(xy) = x^2 y \qquad x(yx) = (xy)x \qquad y(xy) = (yx)y.$$

Fact

Die Oktonionen $\mathbb{O}$ sind alternativ.

Theorem (Struktursatz, Zorn 1933)

Jede *endlich-dimensionale, reelle,* ALTERNATIVE *Divisionsalgebra $\mathcal{A}$ ist isomorph zu $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ oder $\mathbb{O}$.*

Frage

Gibt es weitere, endlich-dimensional, reelle Divisionsalgebren ausser $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$ *(mit Einselement)?*

Theorem (Milnor, Kervaire, 1958)

Jede endlich-dimensionale, reelle Divisionsalgebra hat Dimension 1,2,4 oder 8.

Fact

Es gibt aber weitere endlich-dimensionale, reelle Divisionsalgebren, die ein Einselement haben, und nicht $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ *oder* $\mathbb{O}$ *sind.*

Corollary

Es gibt *endlich-dimensionale,* *reelle Divisionsalgebren nur in den Dimensionen 1,2,4,8.*

- *Es gibt die 'Quadrate-Sätze' nur in den Dimensionen 1,2,4,8*
- *Es gibt Vektorprodudktalgebren nur in den Dimensionen 1,3,7.*