Epidemiologische Modellierung mittels SIR-Modellen

Worüber seit anderthalb Jahren alle irgendwie reden

Sven Prüfer[1]

Mathecamp 2021 – Violau

[1] Basierend auf Vorlage von Kai Cieliebak aus dem Mathecamp 2020

Das einfachste Modell: Ungebremstes Wachstum

$I(t)$ – Anzahl von infizierten Personen zur Zeit t

α – Anzahl Neuinfizierter pro infizierter Person und Zeit

Das einfachste Modell: Ungebremstes Wachstum

$I(t)$ – Anzahl von infizierten Personen zur Zeit t

α – Anzahl Neuinfizierter pro infizierter Person und Zeit

$I(t)$ wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha I(t)$$

Das einfachste Modell: Ungebremstes Wachstum

$I(t)$ – Anzahl von infizierten Personen zur Zeit t

α – Anzahl Neuinfizierter pro infizierter Person und Zeit

$I(t)$ wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t} = \alpha I(t)$$

Lösungen sind exponentielle Funktionen

$$I(t) = I(0)e^{\alpha t}$$

$\Longrightarrow$ exponentielles Wachstum ($\alpha > 0$) oder Abklingen ($\alpha < 0$)

Das SIR-Modell – Variablen

S – Anzahl der ansteckbaren Personen (“susceptible”)

I – Anzahl der ansteckenden Personen (“infectious”)

R – Anzahl der nicht mehr ansteckenden Personen (“removed”)

$N = S + I + R$ – Gesamtzahl aller Personen (konstant)

Das SIR-Modell – Variablen

S – Anzahl der ansteckbaren Personen ("susceptible")

I – Anzahl der ansteckenden Personen ("infectious")

R – Anzahl der nicht mehr ansteckenden Personen ("removed")

$N = S + I + R$ – Gesamtzahl aller Personen (konstant)

S, I, R sind Funktionen der Zeit, Personen wechseln zwischen diesen Gruppen

$$S \xrightarrow{\beta} I \xrightarrow{\gamma} R$$

mit $\beta, \gamma \in \mathbb{R}^{>0}$, die diese Übergänge beschreiben.

Das SIR-Modell – Differentialgleichungen

Das SIR-Modell wird definiert durch die folgenden Differentialgleichungen für die zeitabhängigen Funktionen S, I und R:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} &= -\beta \frac{S}{N} I \\
\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \beta \frac{S}{N} I - \gamma I \\
\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} &= \gamma I
\end{aligned}$$

Parameter des SIR-Modells

$T_{\mathrm{inf}} = \frac{1}{\gamma}$ – Zeitraum, in dem eine infizierte Person ansteckend ist (“infectious time”)

β – Transmissionsrate $= C \cdot P$

C – Anzahl der Kontakte pro Person und Zeit

P – Wahrscheinlichkeit einer Ansteckung bei Kontakt zwischen einer ansteckbaren (S) und einer ansteckenden (I) Person

Herleitung des SIR-Modells

$$-\Delta S = \text{Anzahl der Neuinfektionen im Zeitraum } \Delta t$$
$$= \underbrace{C I \Delta t}_{\#\text{ Kontakte einer } I\text{-Person}} \cdot \underbrace{\frac{S}{N}}_{\text{Wsk., dass Kontakt eine } S\text{-Person ist}} \cdot P$$

$$\Delta R = I \cdot \frac{\Delta t}{T_{\mathrm{inf}}} = \gamma I \Delta t$$

Damit $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = 0$ ist, ergibt sich die dritte Gleichung für $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$.

Annahmen des SIR-Modells

Alle infizierten Personen sind für eine Zeitdauer T_{inf} (“infectious time”) ansteckend.

Nicht mehr ansteckende Personen (R) sind immun oder tot.

Die Größen im Modell sind eher theoretisch: reellwertig, kontinuierliche Zeit, glatte Funktionen, keine “Dunkelziffern”.

β und γ fassen alle Effekte auf die Ausbreitung der Krankheit zusammen. Durch Kontaktbeschränkungen wird also z.B. C (und damit β) gesenkt.

Durch Maßnahmen werden also ständig β und γ verändert und die Ausbreitung darüber kontrolliert.

Lösungen des SIR-Modells I

$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} = \beta \cdot T_{\text{inf}}$ – Reproduktionsrate bzw. Anzahl der Neuinfektionen durch eine infizierte Person

Lösungen des SIR-Modells I

$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} = \beta \cdot T_{\text{inf}}$ – Reproduktionsrate bzw. Anzahl der Neuinfektionen durch eine infizierte Person

Fall 1: $R_0 < 1$: Aus $S \leq N$ folgt

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\beta S}{N} - \gamma\right) \cdot I \leq (\beta - \gamma) I$$

$I(t) \longrightarrow 0$ für $t \longrightarrow \infty$ exponentiell mit Rate $\beta - \gamma < 0$, also die Infektionen klingen ab.

Lösungen des SIR-Modells II

Fall 2: $R_0 > 1$: $I(t)$ wächst anfangs näherungsweise exponentiell, wenn genügend viele ansteckbare Personen vorhanden sind $\left(R_0 \frac{S}{N} > 1\right)$ und S fällt ab.

Lösungen des SIR-Modells II

Fall 2: $R_0 > 1$: $I(t)$ wächst anfangs näherungsweise exponentiell, wenn genügend viele ansteckbare Personen vorhanden sind $\left(R_0 \frac{S}{N} > 1\right)$ und S fällt ab.

Dies geschieht bis zu einem Zeitpunkt t^*, wo

$$\frac{\beta S(t^*)}{N} - \gamma = 0 \iff \frac{S(t^*)}{N} = \frac{1}{R_0} \iff \frac{I(t^*) + R(t^*)}{N} = 1 - \frac{1}{R_0}$$

Lösungen des SIR-Modells II

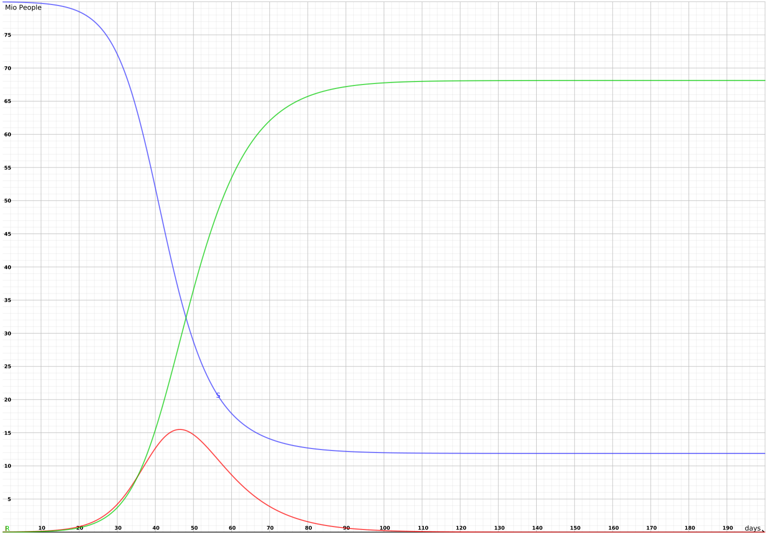
Fall 2: $R_0 > 1$: $I(t)$ wächst anfangs näherungsweise exponentiell, wenn genügend viele ansteckbare Personen vorhanden sind $(R_0 \frac{S}{N} > 1)$ und S fällt ab.

Dies geschieht bis zu einem Zeitpunkt t^*, wo

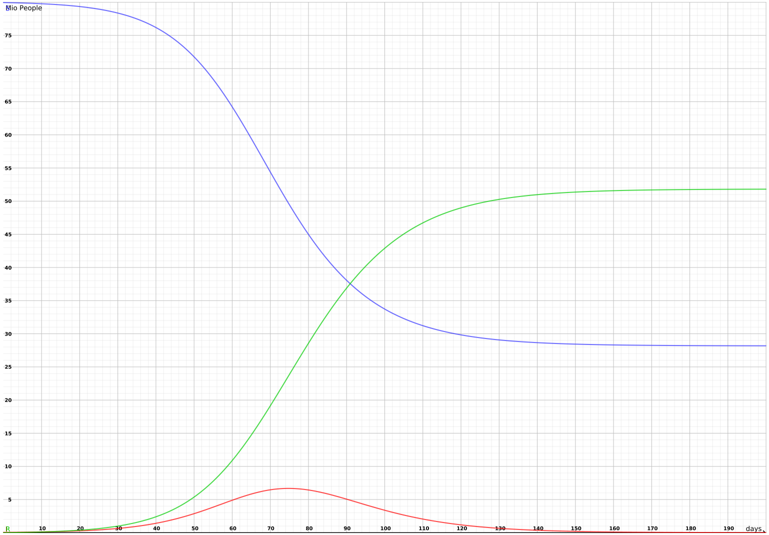
$$\frac{\beta S(t^*)}{N} - \gamma = 0 \iff \frac{S(t^*)}{N} = \frac{1}{R_0} \iff \frac{I(t^*) + R(t^*)}{N} = 1 - \frac{1}{R_0}$$

Danach fällt $I(t)$ und klingt exponentiell ab. Insgesamt durchlaufen dabei mehr als $\left(1 - \frac{1}{R_0}\right) N$ Menschen die Krankheit.

Ein Verlauf als Beispiel



Ein weiteres Beispiel



Herdenimmunität

Wenn eine uninfizierte Bevölkerung bedroht wird von einer Infektion mit einer Reproduktionsrate R_0, was ist die Zahl an immunen Personen, die benötigt wird um einen Ausbruch von Anfang an zu verhindern?

Herdenimmunität

Wenn eine uninfizierte Bevölkerung bedroht wird von einer Infektion mit einer Reproduktionsrate R_0, was ist die Zahl an immunen Personen, die benötigt wird um einen Ausbruch von Anfang an zu verhindern?

$I(0) = 0 \Longrightarrow S(0) + R(0) = N$ und die Bedingung, dass es keinen Ausbruch gibt, lautet $R_0 \frac{S}{N} < 1$ und damit

$$\frac{R(0)}{N} = 1 - \frac{S(0)}{N} > 1 - \frac{1}{R_0}$$

Das gilt aber nur am *Anfang* einer Epidemie!

Diskretisierung, Kalibrierung und Erweiterung des Modells

Viele Vereinfachungen und Probleme:

- Anzahlen sind nicht reellwertig und werden nur tagesweise
-

Fragen?