

# Was ist ein Loch?

Maximilian Keßler

4. September 2021

## **Zusammenfassung**

Das hier ist die (grobe) Zusammenfassung meines Zirkels zur Homologietheorie, den ich in der 12. Klasse auf dem Mathecamp der Universität Augsburg im Sommer 2021 gehalten habe. Große Teile habe ich von meiner Ausarbeitung meines Seminarvortrags zu 'reellen Divisionsalgebren' übernommen, weitere Teile geben einen (groben) Überblick über das, was im Zirkel gemacht wurde, sind aber nicht immer ausgearbeitet, d.h. teilweise nur meine Notizen.

Notizen und Source Code (in  $\text{\LaTeX}$ ) sind unter der [MIT-Lizenz](#) veröffentlicht, und können daher frei vom Mathezirkel oder auch jedem anderen benutzt / bearbeitet / weitergegeben werden.

Es wird wohl früher oder später eine Version geben, die dann (mit SourceCode) auf meinem [GitHub](#) landet, noch bin ich aber nicht dazu gekommen.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Einführung</b>	<b>3</b>
1.1 Versorgungsproblem . . . . .	3
1.2 Löcher . . . . .	3
1.3 Der gekämmte Igel . . . . .	4
<b>2 Crashkurs: Topologie</b>	<b>5</b>
2.1 Grundbegriffe . . . . .	5
2.2 Homotopie . . . . .	5
2.3 Mannigfaltigkeiten . . . . .	5
<b>3 Homologietheorie</b>	<b>8</b>
3.1 Simpliziale Homologie . . . . .	8
3.1.1 Was sind Löcher? . . . . .	8
3.1.2 Simplizialkomplexe . . . . .	10
3.1.3 Homologiegruppen . . . . .	13
3.1.4 Untermannigfaltigkeiten . . . . .	18
3.1.5 Bettizahlen . . . . .	19
3.1.6 Ausblick . . . . .	20
3.2 Singuläre Homologie . . . . .	20
3.3 Homotopieinvarianz . . . . .	21
3.4 Kohomologie . . . . .	21
3.4.1 Kohomologiegruppen . . . . .	21
3.4.2 Poincaré-Dualität . . . . .	22
3.4.3 Bettizahlen . . . . .	22
<b>4 Euler-Charakteristik</b>	<b>23</b>
4.1 Versorgungsproblem . . . . .	23
4.1.1 Klassischer Ansatz . . . . .	23
4.2 Krasses Versorgungsproblem . . . . .	24
4.2.1 Genus von Oberflächen und von Graphen einführen? . . . . .	24
<b>5 Löcher</b>	<b>24</b>
5.1 Hose . . . . .	24
5.1.1 Zusammenkleben von Beinen . . . . .	24
5.2 T-Shirt . . . . .	24
<b>6 Der gekämmte Igel</b>	<b>24</b>
6.1 Vektorfelder . . . . .	24
<b>Bildquellen</b>	<b>25</b>
<b>Literatur</b>	<b>25</b>

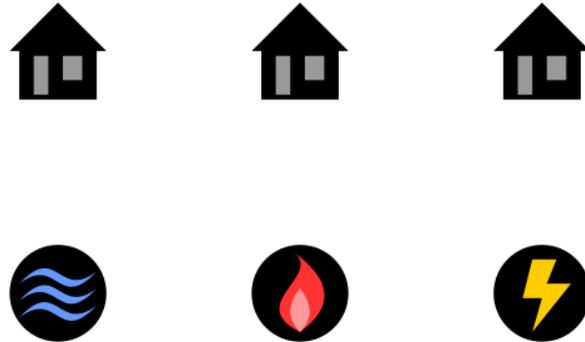


Abbildung 1: Das Versorgungsproblem  
 Bild von [Cmg]

# 1 Einführung

## 1.1 Versorgungsproblem

**Frage 1.1.** In einer Stadt gibt es 3 Häuser sowie 3 Versorgungswerke: Wasser, Strom und Gas. Man will nun Versorgungsleitungen von jedem der Werke zu jedem der Häuser legen. Die Leitungen müssen alle exakt 1m unter der Erdoberfläche verlegt werden und können beliebig geführt werden, dürfen sich aber paarweise nicht schneiden.

Ist es möglich, die Leitungen wie gewünscht zu verlegen, sodass jedes der Häuser an jedes der Werke angeschlossen ist?<sup>1</sup>

Eine Skizze ist in [Abbildung 1](#) zu sehen.

**Wir werden die Euler-Charakteristik kennenlernen**

**Satz 1.2** (Euler). Sei  $G$  ein planarer Graph. Dann gilt:

$$V - E + F = 2.$$

Zeit: 8 min

## 1.2 Löcher

**Frage 1.3.** Was ist ein Loch?

<sup>1</sup>Für die Spezialisten: Wir befinden uns auf der Erde<sup>2</sup>.

<sup>2</sup>Die Erde ist weder flach noch ein Torus, sondern eine Sphäre!

**Frage 1.4.** Was ist die Dimension eines Lochs?

**Wir werden Homologietheorie betreiben (später mehr).**

-> Leute Vorschläge / Beispiele nennen lassen

Zeit: 14 min

**Frage 1.5.** Wie viele Löcher haben folgende Objekte:

- Ebene
- punktierte Ebene
- Sphäre
- Torus
- Hose
- T-Shirt

**Wir werden Bettizahlen kennenlernen**

Zeit: 24 min

### 1.3 Der gekämmte Igel

**Frage 1.6.** Kann man einen Igel<sup>3</sup> stetig kämmen, sodass er nirgends eine kahle Stelle hat?

**Korollar 1.7.** Es gibt zu jedem Zeitpunkt auf der Welt einen windstillen Ort.

**Wir werden die 'allgemeine' Euler-Charakteristik kennenlernen.**

Zeit: 29 min

- Jordan Curve Theorem
- Brouwer Fix Point theorem?
- Osgood Curve

---

<sup>3</sup>Wir nehmen an, dass ein Igel eine perfekte  $S^2$  ist.

## 2 Crashkurs: Topologie

### 2.1 Grundbegriffe

Die grundlegenden Begrifflichkeiten der Topologie seien hier nur der Vollständigkeit halber angegeben, wir werden nicht genauer mit ihnen arbeiten. Für ausführlichere Erläuterungen siehe z.B. die Bücher [Jän01], [Mun18], oder die Vorlesungsnotizen [Kas21].

**Definition 2.1** (Topologie). Eine **Topologie** auf einer Menge  $X$  ist eine Menge  $\mathcal{O}$  von Teilmengen von  $X$ , so dass gilt:

- 1)  $\emptyset, X \in \mathcal{O}$
- 2) Für  $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{O}$  ist auch  $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{O}$
- 3) Für jede Familie  $\{U_i\}_{i \in I}$  mit  $U_i \in \mathcal{O}$  ist auch  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{O}$

Die Mengen in  $\mathcal{O}$  heißen **offene Mengen**.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathcal{O})$  aus einer Menge  $X$  und einer Topologie  $\mathcal{O}$  auf  $X$ .

Zur Vorstellung sollte man sich einen topologischen Raum (für uns) im wesentlichen wie einen metrischen Raum vorstellen; jeder metrische Raum ist mit seiner Kollektion an offenen Mengen auch ein topologischer Raum und in der Tat sind alle Räume, die wir behandeln werden, auch metrische Räume.

- Stetigkeit
- Homöomorphismen
- Wege, Schleifen

Definiere hier noch einige Sachen:

### 2.2 Homotopie

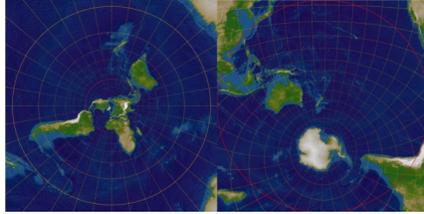
### 2.3 Mannigfaltigkeiten

Für unsere Zwecke werden wir die Homologietheorie nur für *Mannigfaltigkeiten* entwickeln. Mannigfaltigkeiten sind eine spezielle Sorte von topologischen Räumen, die wir 'sehr gut verstehen', die aber immer noch allgemein genug sind, unsere grundlegenden Konzepte formulieren zu können. Zentrales Prinzip ist das Folgende:

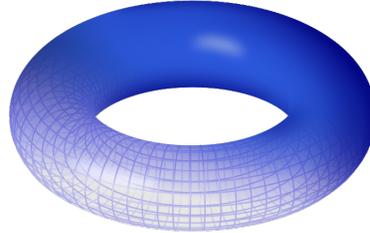
**Idee.** Eine Mannigfaltigkeit sieht lokal aus wie  $\mathbb{R}^n$ .

In **Abbildung 2** sind einige bekannte Beispiele von Mannigfaltigkeiten abgebildet:

- Die Erde (genauer: die Oberfläche der Erde) ist eine *zweidimensionale* Mannigfaltigkeit; sie sieht lokal so aus wie ein Ausschnitt der Ebene. Zu



(a) Die Erde  
Bild von [Rok]



(b) Torus  
Bild von [Leo]

Abbildung 2: Bekannte Beispiele von Mannigfaltigkeiten

sehen sind zwei *Karten*, die die Erde in der Umgebung des Nord- und des Südpols zeigen.

- Auch der Torus ist eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Man beachte, dass *Torus* stets 'nur' die Oberfläche meint, d.h. der Torus entsteht als  $S^1 \times S^1$ .
- Die *projektive Ebene* ist ebenfalls eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit. Die zu sehende Abbildung zeigt eine (sich selbst schneidende) Einbettung in den  $\mathbb{R}^3$  (es handelt sich nicht um eine formale Einbettung, wie man sie vielleicht aus der Topologie kennt). Wir interessieren uns weniger für die konkrete Struktur als für den simplen Fakt, dass die projektive Ebene tatsächlich lokal aussieht wie eine Ebene, und somit eine Mannigfaltigkeit ist (und ihren Namen verdient!).

**Definition 2.2** (Mannigfaltigkeit). Eine **Mannigfaltigkeit** der **Dimension**  $n$  ist ein topologischer Raum  $X$ , sodass

1.  $X$  ist Hausdorffsch<sup>4</sup>
2.  $X$  erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom<sup>5</sup>
3.  $X$  ist lokal homöomorph zu einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ , d.h. es gibt eine offene Umgebung  $x \in U$  und eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ , sowie einen Homöomorphismus

$$\varphi: U \xrightarrow{\cong} V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Ein paar Bemerkungen sind angebracht:

<sup>4</sup> $X$  ist Hausdorffsch, wenn für  $x \neq y$  offene, disjunkte Mengen  $x \in U$ ,  $y \in V$  existieren.

<sup>5</sup> $X$  erfüllt das 2. Abzählbarkeitsaxiom, wenn es eine abzählbare Basis der Topologie gibt, d.h. es gibt eine abzählbare Familie  $\{U_i\}_{i \in I}$  offener Mengen, sodass jede offene Menge  $U \subseteq X$  Vereinigung (mancher) der  $U_i$  ist.

- Die Hausdorff-Bedingung ist sehr harmlos und eher technisch. Sie wird in all unseren Fällen erfüllt sein. Insbesondere ist jeder metrische Raum ein Hausdorff-Raum.
- Auch das 2. Abzählbarkeitsaxiom wird für uns keine Rolle spielen und stets erfüllt sein.
- Tatsächlich werden Mannigfaltigkeiten in der Literatur sogar manchmal ohne die Forderung an das 2. Auswahlaxiom definieren, es verliert also zusätzlich an Relevanz und ist hier nur der Vollständigkeit halber erwähnt, wir werden es - wie auch die Hausdorffbedingung - ignorieren.

**Definition 2.3.** Eine Mannigfaltigkeit  $M$  ist **kompakt**, wenn der zu Grunde liegende topologische Raum  $M$  kompakt ist.

**Definition 2.4** (Differenzierbare Mannigfaltigkeit). Ist  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $U \subseteq M$  offen,  $V \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, so heißt ein Homöomorphismus

$$\varphi: U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n.$$

eine **Karte**. Eine Kollektion von Karten  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$ , sodass  $M = \bigcup_{i \in I} \text{dom}(\varphi_i)$  heißt **Atlas**.

Eine Mannigfaltigkeit, zusammen mit einem Atlas  $\{\varphi_i\}_{i \in I}$  heißt **differenzierbar**, wenn beliebige *Kartenwechsel*, d.h. Abbildungen

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}|_{\varphi_j^{-1}(\text{dom}(\varphi_i))} : \varphi_j^{-1}(\text{dom}(\varphi_i)) \rightarrow \text{im}(\varphi_i).$$

unendlich oft differenzierbar ist.

$M$  heißt **glatt**, wenn Kartenwechsel unendlich oft differenzierbar sind.

Man beachte, dass es sich hierbei also nicht um eine Eigenschaft des topologischen Raums selbst, sondern insbesondere auch um eine des (fest) gewählten Atlas handelt.

Wir betrachten ausschließlich kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeiten und werden uns nicht näher mit den Begrifflichkeiten auseinandersetzen. Mit einer Mannigfaltigkeit  $M$  meinen wir also stets eine kompakte Mannigfaltigkeit  $M$ , zusammen mit einem fest gewählten Atlas, sodass  $M$  dadurch eine differenzierbare Struktur trägt. Einige der Sätze, die wir sehen werden, benötigen diese Eigenschaften, sie werden (für uns) stets 'automatisch' erfüllt sein.

## 3 Homologietheorie

### 3.1 Simpliziale Homologie

#### 3.1.1 Was sind Löcher?

Die HOMOLOGIETHEORIE verfolgt das Ziel, Mannigfaltigkeiten (allgemeiner: topologischen Räumen) sogenannte HOMOLOGIEGRUPPEN zuzuordnen. Es handelt sich um topologische Invarianten der Räume, die nützlich sind, um diese zu unterscheiden, oder die (Nicht-)Existenz von Abbildungen zwischen diesen zu untersuchen. Grundsätzlich gilt Folgendes:

**Idee.** Wir wollen 'Löcher' in Räumen zählen.

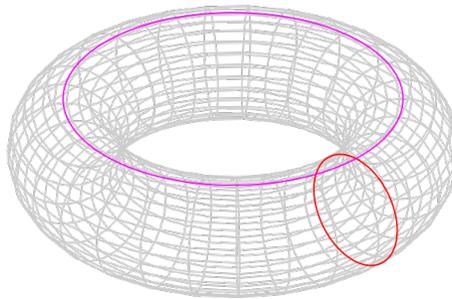


Abbildung 3: Torus mit nichttrivialen Schleifen  
Bild von [Kri]

Intuitiv ist klar, dass in **Abbildung 3** die rote und rosa Schleife Löcher im Torus beschreiben, sie 'umrunden' jeweils das Loch im Torus, das wir erhalten, wenn wir diesen entlang der Schleifen entlang aufschneiden.

In der Tat gibt es sogar noch ein wesentlich größeres Loch, nämlich genau das 'Innere' des Torus, das die 'Oberfläche' ja umschließt, und man kann sicherlich argumentieren, dass dieses eine höhere *Dimension* haben sollte als die anderen beiden Löcher.

Es ist jedoch schwerer als gedacht, ein Loch in einem topologischen Raum formal zu beschreiben, denn ein Loch beschreibt ja gerade die *Nicht*-Existenz von etwas. Man benötigt daher 'indirektere' Wege, Löcher in topologischen Räumen beschreiben zu können.

Wir nähern uns der Thematik daher mit einem (vermeintlich) leichteren Beispiel an.

**Beispiel 3.1** (Punktierte Ebene). Betrachte die *punktierte Ebene*  $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , zu sehen in **Abbildung 4**. Auch hier können wir uns intuitiv darauf einigen, dass diese 'im Ursprung' (der aber gar nicht mehr vorhanden ist) ein 'Loch besitzt'.

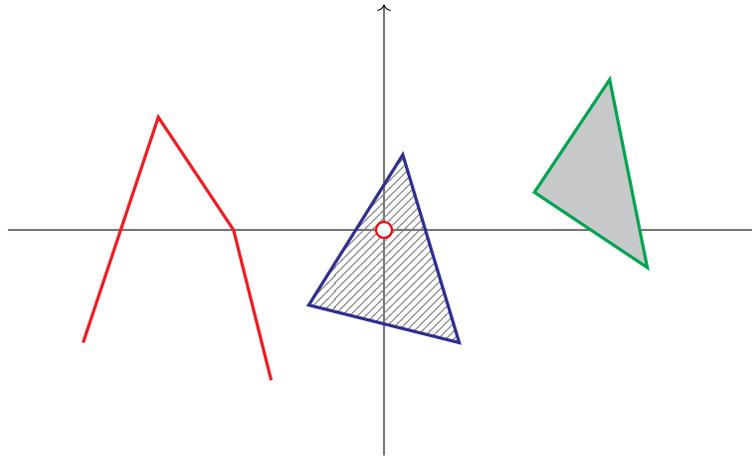


Abbildung 4: Punktierte Ebene mit ausgewählten Simplicen

Betrachte nun den dunkelgrünen, geschlossenen Kantenzug. Unter einem *Kantenzug* verstehen wir ab sofort eine beliebige Menge an Kanten in der Ebene, jede spezifiziert durch ihre beiden Endpunkte. Ein *geschlossener* Kantenzug ist ein Kantenzug, sodass jeder Punkt der Ebene Endpunkt von gerade vielen der Kanten des Kantenzugs ist.

Sprachliche Unsauberkeiten könnten uns schnell dazu verleiten, den grünen Kantenzug als *Dreieck* zu bezeichnen, wir wollen hier aber bewusst differenzieren. In der Tat bildet der grüne Kantenzug jedoch den *Rand*<sup>6</sup> des grauen Dreiecks<sup>7</sup>. Hier scheint also alles ganz normal.

Betrachtet man nun aber den blauen Kantenzug, so ist auch dieser zunächst geschlossen und 'sieht aus wie der Rand eines Dreiecks', sprachlich unsauber könnten wir auch den blauen Kantenzug als Dreieck bezeichnen.

**Beobachte 3.2.** Der blaue Kantenzug ist *nicht* der Rand eines Dreiecks.

Der zum Scheitern verurteilte Versuch, solch ein Dreieck zu finden, ist in [Abbildung 4](#) schraffiert dargestellt, er scheitert jedoch am fehlenden Ursprung.

Betrachte nun noch den roten Kantenzug. Auch hier stellt man - noch etwas offensichtlicher - fest, dass es sich nicht um den Rand eines Dreiecks handelt. Im Gegensatz zum blauen Kantenzug wundert einen das jedoch nicht, den der rote Kantenzug 'sieht auch gar nicht aus' wie der Rand eines Dreiecks. Das drückt sich darin aus, dass der rote Kantenzug auch gar nicht geschlossen ist.

<sup>6</sup>Wir gehen an dieser Stelle nicht auf eine formale Definition ein, weil wir diese später sowieso in allgemeinerer Form noch sehen werden

<sup>7</sup>Dreiecke sind für uns stets abgeschlossen

Wir halten also fest:

**Geschlossene Kantenzüge<sup>8</sup>, die nicht der Rand eines Dreiecks sind, beschreiben Löcher in unserem Raum.**

### 3.1.2 Simplicialkomplexe

Um die eben beobachteten Ergebnisse formalisieren zu können, müssen wir die Begriffe des 'Dreiecks' und der 'Kante' sinnvoll auf beliebige Dimensionen verallgemeinern. Das richtige Konzept hierzu ist das eines *Simplex*, die die einfachsten  $k$ -dimensionalen Objekte darstellen.

**Definition 3.3** (Simplex). Ein  $k$ -Simplex in  $\mathbb{R}^n$  ist die konvexe Hülle von  $k + 1$  affin unabhängigen Punkten  $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ .

*Affin unabhängig* bedeutet, dass die  $k$  Vektoren  $v_l - v_0$  für  $1 \leq l \leq k$  linear unabhängig sind. Die *konvexe Hülle* beschreibt diejenigen Punkte, die von  $v_0, \dots, v_k$  'umschlossen' werden, d.h. die Menge

$$S = \left\{ \lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_k v_k \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}.$$

ist unser Simplex.

Ein  $k$ -Simplex ist natürlich durch seine  $k + 1$  Eckpunkte  $v_0, \dots, v_k$  eindeutig bestimmt, und umgekehrt lassen sich diese  $k + 1$  Eckpunkte aus dem Simplex auch eindeutig wieder rekonstruieren. Wenn nicht weiter spezifiziert, meinen wir stets die konvexe Hülle.

**Nebenbemerkung 3.4.** Im Kontext der Homologietheorie definiert man einen Simplex üblicherweise etwas anders, indem man die *Reihenfolge* der Eckpunkte als weiteres Datum eines Simplex auffasst. Insbesondere lässt sich dann ein Simplex *nicht* aus seiner konvexen Hülle rekonstruieren.

Das benötigt man, um später *Orientierungen* (wird das Dreieck gegen oder im Uhrzeigersinn durchlaufen?) festlegen zu können. Wir werden Orientierung jedoch gänzlich ignorieren, weswegen wir der Reihenfolge der Eckpunkte keine Bedeutung zukommen lassen, um Dinge zu vereinfachen.

**Beispiel 3.5** (Niederdimensionale Simplexe). In [Abbildung 5](#) sind die 4 kleinst-dimensionalen Simplexe abgebildet:

- Ein 0-Simplex ist ein Punkt

<sup>8</sup>Um genau zu sein, muss der Kantenzug für diese Aussage genau 3 Kanten haben, näheres ebenfalls gleich

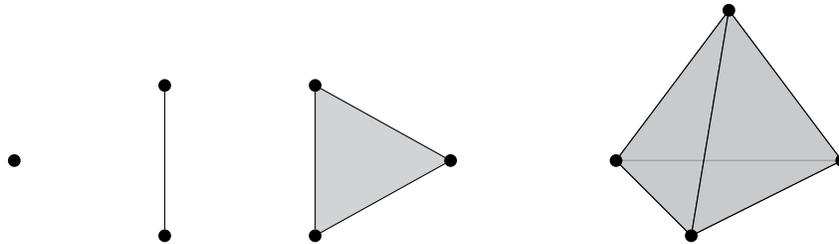


Abbildung 5: Niedrigdimensionale Simplexes

- Ein 1-Simplex ist eine Strecke
- Ein 2-Simplex ist ein Dreieck
- Ein 3-Simplex ist ein Tetraeder

Jetzt lässt sich auch leicht präzisieren, was wir mit dem *Rand* eines Simplex meinen:

**Definition 3.6** (Teilsimplex). Sei  $S$  ein  $k$ -Simplex mit Ecken  $v_0, \dots, v_k$ . Ein  $l$ -**Teilsimplex** von  $S$  ist ein  $l$ -Simplex, gebildet aus  $l + 1$  der Ecken  $v_0, \dots, v_k$ .

**Beobachte 3.7.** Ein  $k$ -Simplex halt also  $\binom{k+1}{l+1}$  viele  $l$ -Teilsimplizes.

**Definition 3.8** (Rand). Sei  $S$  ein  $k$ -Simplex. Der **Rand** von  $S$  ist die Menge aller  $k - 1$ -Teilsimplizes von  $S$ .

Um nun auch über mehrere Simplexes, also z.B. über Kantenzüge, wie wir sie in **Beispiel 3.1** gesehen haben, reden zu können, führt man sogenannte *Simplizialkomplexe* ein. Wir folgen hier [Jän01, S. 111].

**Definition 3.9** (Simplizialkomplex). Eine Menge  $K$  von Simplexes in  $\mathbb{R}^n$  heißt **Simplizialkomplex**, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- Enthält  $K$  einen Simplex  $S$ , so auch alle seine Teilsimplizes
- Der Durchschnitt von zwei Simplexes in  $K$  ist entweder leer, oder ein gemeinsames Teilsimplex.
- $K$  ist *lokal endlich*, d.h. jeder Punkt des  $\mathbb{R}^n$  hat eine Umgebung, die nur endlich viele der Simplexes von  $K$  schneidet.

Auch hier sei angemerkt, dass alle Simplizialkomplexe, denen wir begegnen werden, bereits endlich sind, d.h. sie bestehen nur aus endlich vielen Simplexes,

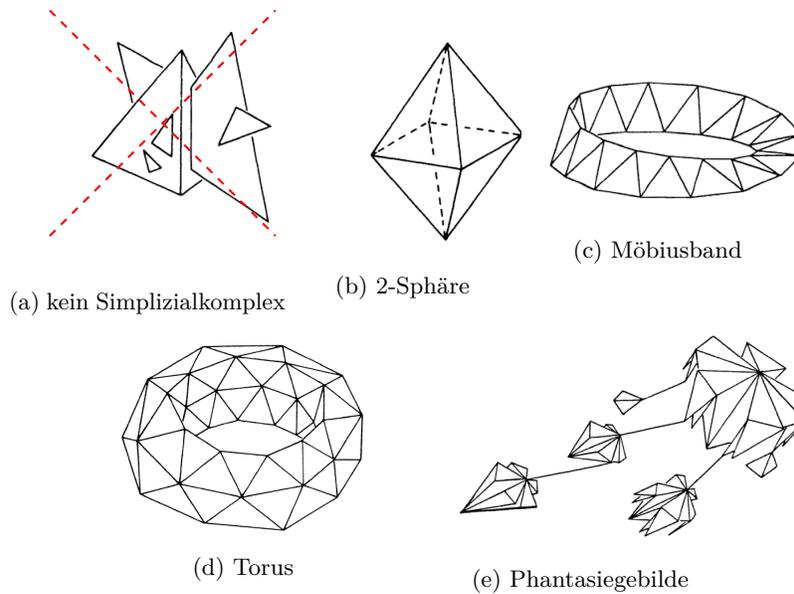


Abbildung 6: Simplizialkomplexe  
 Bilder von [Jän01, S. 111f]

weswegen (iii) trivial erfüllt ist, und wir die Bedingung ebenfalls ab sofort ignorieren.

**Beispiel 3.10** (Simplizialkomplexe). Betrachte [Abbildung 6](#).

- (a) zeigt keinen Simplizialkomplex, man erkennt leicht, dass Bedingung (ii) verletzt ist.
- (b) zeigt eine Realisierung der 2-Sphäre als Simplizialkomplex. Zwei Dinge sind zu beachten:

Zum abgebildeten Simplizialkomplex gehören - um Bedingung (i) zu erfüllen - notwendigerweise nicht nur die acht 2-Simplizes (Dreiecke), sondern auch die zwölf 1-Simplizes (Kanten) sowie die 0-Simplizes (Punkte) die man erkennen kann.

Mit der Aussage, dass es sich bei dem abgebildeten Simplizialkomplex um die 2-Sphäre handelt, meinen wir, dass die *Vereinigung* der Simplizes in  $K$  (also der acht Dreiecke, 12 Kanten und 8 Punkte) homöomorph<sup>9</sup> ist zur 2-Sphäre.

- (c) und (d) zeigen mögliche Simplizialkomplexe, die ein Möbiusband und den Torus darstellen. Auch hier meinen wir wie in (c) dass

die entsprechende Vereinigung der Simplizes homöomorph ist zum üblichen Möbiusband bzw. Torus.

- (e) zeigt einen etwas ausgefalleneren Simplizialkomplex, den Jänich als *Phantasiegebilde* bezeichnet. Er erfüllt alle Voraussetzungen an einen Simplizialkomplex, man stellt aber schnell fest, dass er wegen seiner Irregularität nicht homöomorph zu einer Mannigfaltigkeit sein kann, er wird uns also nicht weiter interessieren.

### 3.1.3 Homologiegruppen

Nun können wir unsere bisher nur intuitiven Konzepte von Löchern, gegeben durch geschlossene Kantenzüge, die keine Ränder sind, präzisieren, indem wir uns einen Simplizialkomplex  $K$  vorgeben.

**Definition 3.11** (Homologiegruppen). Sei  $K$  ein Simplizialkomplex.

- Für  $n \geq 0$  definiere die **Kettengruppen**  $C_n(K)$  als die  $\mathbb{F}_2$ -Vektorräume, die von den  $n$ -Simplizes aus  $K$  als Basiselemente erzeugt werden. Ein element  $c \in C_n(K)$  heißt dann auch  $n$ -**Kette**. Setze zudem  $C_{-1} := \{0\}$ .
- Man definiert nun für  $n \geq 0$  die **Randabbildung**  $\partial_n: C_n \rightarrow C_{n-1}$ , die auf den Basiselementen dadurch gegeben ist, einen  $n$ -Simplex auf die (formale) Summe seiner  $n - 1$ -Teilsimplizes abbildet.  $\partial_0$  sei hierbei die Nullabbildung.
- Elemente aus  $\ker \partial_n$  heißen  $n$ -**Zyklen**, Elemente aus  $\text{im } \partial_{n+1}$  heißen  $n$ -**Ränder**
- Man definiert nun die **Homologiegruppen** von  $K$  als

$$H_n(K) := \ker \partial_n / \text{im } \partial_{n+1}.$$

Auch hier sind einige motivierende Erklärungen angebracht:

- Die Motivation für die Betrachtung der  $n$ -Ketten kommt wie bereits erwähnt daher, dass wir nicht nur einzelne Kanten, sondern auch Kantenzüge betrachten wollen. Ein Kantenzug ist jetzt einfach eine 1-Kette.
- Die Motivation dafür, über  $\mathbb{F}_2$  zu arbeiten, kommt daher, dass wir uns nicht um Orientierungsfragen kümmern müssen, weil Vorzeichen jetzt irrelevant werden. Es ist möglich, die Homologietheorie auch mit Koeffizienten z.B.

<sup>9</sup>*Homöomorph* ist der korrekte Begriff für 'Gleichheit' von topologischen Räumen.  $X$  und  $Y$  sind homöomorph, wenn es zueinander inverse, stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  und  $g: Y \rightarrow X$  gibt.

in  $\mathbb{Z}$  zu betreiben<sup>10</sup>, das ist uns aber zu kompliziert.

- Wir hatten den Rand eines  $n$ -Simplex bereits als die Menge seiner  $n - 1$ -Teilsimplizes definiert, das deckt sich mit der gerade eben definierten Randabbildung  $\partial_n$ , die einen  $n$ -Simplex auf die *Summe* (anstatt der Menge) seiner  $n - 1$ -Teilsimplizes abbildet. In [Beispiel 3.1](#) ist also beispielsweise

$$\partial_2 \left( \triangle \right) = \triangle + \triangle + \triangle$$

Die Definition der  $n$ -Ränder passt also auch zu unserem bisherigen Verständnis von Rändern.

- Ketten sind jetzt Verallgemeinerungen von dem, was wir zuvor gemeinhin als 'geschlossener Kantenzug' bezeichnet haben. Man beachte aber, dass es jetzt vorkommen kann, dass eine 1-Kette beispielsweise aus 4 Kanten besteht, dann ist sie recht offensichtlich nicht der Rand *eines* Dreiecks, dafür aber (potenziell) die Summe der Ränder von mehreren Dreiecken, also von einer 2-Kette.
- Wir hatten gesagt, dass ein geschlossener Kantenzug ein Loch beschreibt, wenn er kein Rand ist. In einem Simplicialkomplex beschreibt nun eine  $n$ -Kette  $c$  ein Loch, wenn sie kein  $n$ -Rand ist, d.h. wenn die Klasse  $|c| \in H_n(K)$  *nicht* das triviale Element aus  $H_n(K)$  ist.
- Wir haben jetzt zusätzlich noch den Vorteil gewonnen, dass wir tatsächlich nicht nur von der Existenz von Löchern sprechen können, sondern sogar mit Ihnen rechnen können, weil wir die - von der Geometrie völlig losgelösten (wenn auch dadurch definierten) - Homologiegruppen (für uns: Vektorräume) definiert haben. Das ist auch das namensgebende Element für die ALGEBRAISCHE Topologie: Wir haben geometrisches in algebraisches übersetzt.

**Nebenbemerkung 3.12** (Formale Details). Um  $H_n(K)$  definieren zu können, muss man zunächst noch nachrechnen, dass für die Untervektorräume  $\ker \partial_n$ , im  $\partial_{n+1} \subseteq C_n$  tatsächlich immer im  $\partial_{n+1} \subseteq \ker \partial_n$  gilt, sonst können wir auch keinen Quotienten bilden.

Wir haben also gesehen, dass sich mit Simplicialkomplexen nun Löcher in sinnvoller Art und Weise beschreiben lassen. Allerdings brauchen wir dazu (bisher) auch einen Simplicialkomplex. Für das Möbiusband, den Torus und die 2-Sphäre haben wir in [Abbildung 6](#) bereits geeignete Simplicialkomplexe - man spricht dann auch von [Triangulierungen](#) dieser Räume - gesehen. Allgemein verschafft folgender Satz Abhilfe:

<sup>10</sup>Man muss dann aber mit sog. *Moduln* arbeiten; im Falle von  $\mathbb{Z}$  ergeben sich abelsche Gruppen. Daher auch der Name der *Homologiegruppe*, obwohl es für uns sogar stets  $\mathbb{F}_2$ -Vektorräume sind.

Future: das nachrechnen

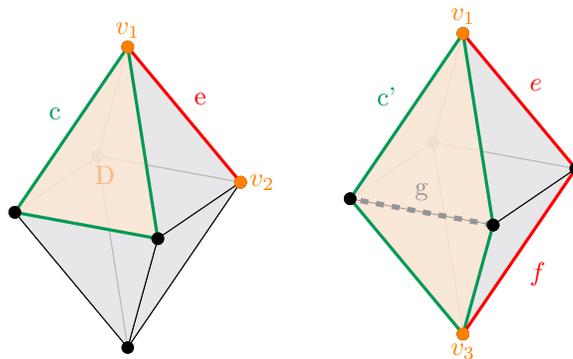


Abbildung 7: Ausgewählte Ketten im Simplicialkomplex der 2-Sphäre

**Satz\* 3.13.** Jede kompakte, differenzierbare Mannigfaltigkeit ist *triangulierbar*, d.h. es gibt einen Simplicialkomplex, der homöomorph zur Mannigfaltigkeit ist.

Damit können wir also nun auch die Homologiegruppen einer beliebigen kompakten, differenzierbaren Mannigfaltigkeit (wie sie es bei uns immer sein werden) definieren, indem wir eine Triangulierung wählen, und dann die Definition für Simplicialkomplexe anwenden.

**Nebenbemerkung 3.14.** An dieser Stelle *muss* man sich eigentlich überlegen, dass die entstehenden Homologiegruppen unabhängig von der Wahl der Triangulierung der Mannigfaltigkeit sind. Das ignorieren wir an dieser Stelle gekonnt und glauben einfach, dass alles so funktioniert, wie wir es uns wünschen.

**Beispiel 3.15** (Homologiegruppen der Sphäre). Sei  $S^2$  die 2-Sphäre, und betrachte die Triangulierung, die wir bereits in [Abbildung 6](#) gesehen haben. Wir überlegen uns zunächst, dass die Kettengruppen gegeben sind durch

$$\begin{array}{ccccccccc}
 C_3 & \xrightarrow{\partial_3} & C_2 & \xrightarrow{\partial_2} & C_1 & \xrightarrow{\partial_1} & C_0 & \xrightarrow{\partial_0} & C_{-1} \\
 \wr & & \wr & & \wr & & \wr & & \wr \\
 \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{F}_2^8 & \longrightarrow & \mathbb{F}_2^{12} & \longrightarrow & \mathbb{F}_2^8 & \longrightarrow & \{0\}
 \end{array}$$

Um  $H_0(S^2)$  zu bestimmen, müssen wir also  $\ker \partial_0 / \text{im } \partial_1$  berechnen. Es ist  $\ker \partial_0 = C_0$ . Um  $\text{im } \partial_1$  zu berechnen, betrachte zunächst den linken Simplicialkomplex in [Abbildung 7](#), in dem die 1-Kette  $e$  zu sehen ist. Nun

ist  $\partial_1(e) = v_1 + v_2 = v_1 - v_2$ , also muss  $|v_1| = |v_2|$  für die Klassen der 0-Ketten  $v_0, v_1$  in  $H_0(S^2)$  gelten. Im zweiten Bild ist die 1-Kette  $e + f$  zu sehen, dessen Rand nun gegeben ist durch

$$\partial_1(e + f) = \partial_1(e) + \partial_1(f) = v_1 + v_2 + v_2 + v_3 = v_1 + v_3.$$

also ist auch  $|v_1| = |v_3| \in H_0(S^2)$ . Man erkennt leicht, dass also in der Tat *alle* Punkte  $v_1, \dots, v_6$  die gleiche Klasse in  $H_0(S^2)$  erzeugen werden, insgesamt kommt man nun zu dem Ergebnis, dassi

$$H_0(S^2) = \mathbb{F}_2^6 / \langle v_i - v_j \rangle = \mathbb{F}_2^6 / \langle v_i - v_0 \rangle \cong \mathbb{F}_2.$$

Für  $H_1(S^2)$  betrachten wir  $\ker \partial_1 / \text{im } \partial_2$ . Beispielsweise ist die grüne 1-Kette  $c$  im linken Bild ein 1-Zyklus, d.h.  $c \in \ker \partial_1$ , allerdings gilt für den 2-Simplex  $D$  im linken Bild auch, dass  $\partial_2(D) = c$ , weswegen  $c$  auch ein 1-Rand ist. Die Klasse von  $c$  in  $H_1(S^2)$  ist also trivial.

Für die 1-Kette  $c'$  im rechten Bild gilt ähnliches: es handelt sich zwar um einen Zyklus, jedoch ist  $c'$  auch das Bild unter  $\partial_2$  von den beiden orange unterlegten Dreiecken. Hier ist wichtig, dass wir 2-Ketten zugelassen haben, und nicht nur 2-Simplizes, denn  $c'$  ist *nicht* Rand eines 2-Simplex. Da sich die Kante  $g$  allerdings unter der Randabbildung  $\partial_2$  'kürzt' (sie ist Rand beider markierter 2-Simplizes), ist  $c'$  dennoch ein 1-Rand nach Definition. Auch die Klasse von  $c'$  ist also trivial.

Mit etwas mehr Überlegungen kommt man tatsächlich zu dem Schluss, dass *alle* 1-Ketten der Sphäre auch 1-Ränder sind, folglich ist

$$H_1(S^2) = 0.$$

trivial.

Für  $H_2(S^2)$  untersuchen wir nach Definition  $\ker \partial_2 / \text{im } \partial_3$ . Es ist im  $\partial_3$  trivial, weil es nur die leere 3-Kette gibt, also  $H_2(S^2) \cong \ker \partial_2$ . Man stellt nun fest, dass die einzige nichttriviale 2-Kette, die auch ein 2-Zyklus ist, die Summe aller 2-Simplizes ist. Man erhält also damit

$$H_2(S^2) \cong \mathbb{F}_2.$$

Auch das ist kein Zufall: Wir werden feststellen, dass es bei jeder  $n$ -dimensionalen, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit genau ein nichttriviales Element in  $H_n(X)$  gibt, das man durch die Summe aller  $n$ -Simplizes dieser Mannigfaltigkeit erhält, weswegen  $H_n(X) \cong \mathbb{F}_2$  folgt.

**Beispiel 3.16.** In der Tat lassen sich ebige Überlegungen auch für die  $n$ -Sphäre durchführen, man gelangt dann dazu, dass für die  $n$ -Sphäre  $S^n$

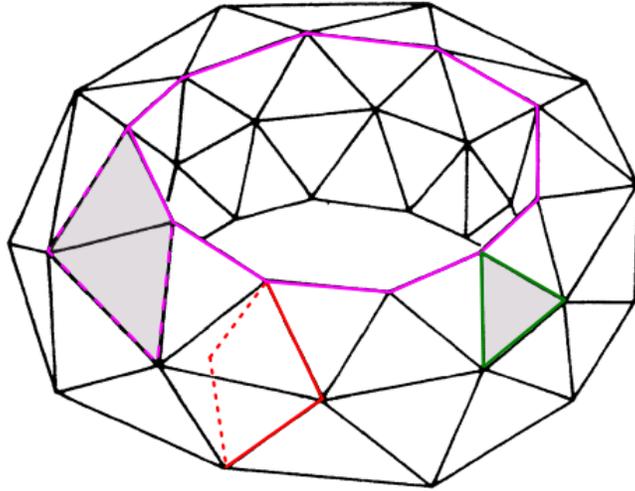


Abbildung 8: Ausgewählte Ketten im Simplicialkomplex des Torus

ihre Homologiegruppen gegeben sind durch:

$$H_k(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & k = 0, n \\ \{0\} & \text{sonst} \end{cases}.$$

**Beispiel 3.17** (Homologiegruppen des Torus). Sei  $T$  der Torus, wir wollen auch hier die Homologiegruppen bestimmen. Dazu betrachte [Abbildung 8](#) mit einigen skizzierten Ketten im Simplicialkomplex des Torus.

Wie auch in [Beispiel 3.16](#) erhält man, dass  $H_0(T) \cong \mathbb{F}_2$ , weil der Torus (weg)zusammenhängend ist, und  $H_2(T) \cong \mathbb{F}_2$ , indem wir als nichttriviales Element die 2-Kette wählen, die die Summe aller 2-Simplizes ist. Der interessante Teil ist also  $H_1(T)$ .

Die dunkelgrüne 1-Kette ist ein 'typischer' 1-Zyklus, allerdings handelt es sich auch um einen 1-Rand, denn das grau unterlegte Dreieck (2-Simplex) hat als Rand genau diesen grünen Zyklus. Die erzeugte Homologiekategorie ist also trivial.

Interessanter ist die pinke 1-Kette, die ebenfalls ein 1-Zyklus ist. Man stellt nun aber fest, dass diese *nicht* ein 1-Rand ist<sup>11</sup>. Die erzeugte Homologiekategorie ist also *nicht* trivial.

Gleiches gilt für den roten skizzierten 1-Zyklus: Auch dieser ist kein Rand und die erzeugte Klasse somit nicht trivial. Es stellt sich sogar weiter heraus, dass der rote und der pinke Zyklus *nicht* die gleiche Homologiekategorie

darstellen (auch das zeigen wir nicht). Insbesondere erhalten wir mit der Summe der beiden 1-Zyklen einen weiteren 1-Zyklus, der nicht trivial und verschieden zu den bisherigen ist. Also ergibt sich bereits, dass

$$\emptyset, \text{ pinker Zyklus, roter Zyklus, pinker Zyklus} + \text{ roter Zyklus} \in H_1(T).$$

paarweise verschiedene Elemente sind.

Betrachte nun eine leichte Abwandlung des pinken Zyklus, indem wir einen 'Umweg' über die drei gestrichelten pinken Kanten nehmen, und dafür die 'umgangene' pinke Kante entfernen. Auch diese ist ein 1-Zyklus, und auch diese erzeugte Homologiekategorie ist nicht trivial. Man stellt nun aber fest, dass diese Variation vom ursprünglichen pinken Zyklus sich nur um den Rand der beiden 'umlaufenen', grau unterlegten 2-Simplices unterscheidet. Mit anderen Worten: die beiden pinken Varianten unterscheiden sich nur um einen 2-Rand, und erzeugen somit die gleiche Homologiekategorie.

Genau diese Identifikation 'ermöglicht' es uns erst, dass wir 'das' Loch, das der pinke Zyklus umläuft, nicht doppelt zählen: Der gestrichelte pinke 1-Zyklus ist nur eine Variante des gleichen Zyklus.

Man überlegt sich abschließend, dass alle weiteren 1-Zyklen die gleiche Homologiekategorie erzeugen wie die vier bereits erwähnten, d.h. sie unterscheiden sich nur um einen 1-Rand von (genau) einem dieser vier 1-Zyklen.

Zusammenfassend ergibt sich also:

$$H_k(T) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2 & k = 0 \\ \mathbb{F}_2^2 & k = 1 \\ \mathbb{F}_2 & k = 2 \\ \{0\} & k \geq 3 \end{cases}.$$

### 3.1.4 Untermannigfaltigkeiten

Bisher können wir zwar Mannigfaltigkeiten ebenfalls ihre Homologiegruppen zuordnen, allerdings haben wir noch keine (sinnvollen) Möglichkeiten, Elemente dieser zu beschreiben, ohne einen Simplicialkomplex gewählt zu haben.

**Satz\* 3.13** lässt sich jedoch auch dazu erweitern, dass wir Triangulierungen einer kompakten, differenzierbaren Untermannigfaltigkeit<sup>12</sup> auf die Mannigfaltigkeit selbst fortsetzen können. Die Triangulierung der Untermannigfaltigkeit ist dann stets ein Zyklus.<sup>13</sup>

Auf diese Weise induziert jede kompakte, differenzierbare  $k$ -Untermannigfaltigkeit  $N$  einer kompakten, differenzierbaren  $n$ -Mannigfaltigkeit  $M$  eine Homologiekategorie von  $M$ .

<sup>11</sup>Durch etwas ausprobieren ist man sehr schnell dieser Meinung, und das ist auch gut für die Intuition. Einen formalen Beweis geben wir hier jedoch nicht.

<sup>12</sup>Es reicht, eine abgeschlossene, differenzierbare Untermannigfaltigkeit zu haben, da unsere Mannigfaltigkeit selbst ja schon kompakt ist.

<sup>13</sup>Wir beweisen das aber nicht.

Future: vielleicht beweisen oder referenzieren?

**Notation 3.18.** Sei  $M$  eine kompakte, differenzierbare  $n$ -Mannigfaltigkeit, und sei  $N$  eine kompakte, differenzierbare  $k$ -Untermannigfaltigkeit<sup>14</sup>. Dann notieren wir die von  $N$  induzierte Homologieklassse von  $M$  mit

$$|N| \in H_k(M).$$

**Nebenbemerkung 3.19** (Formale Details). Auch hier muss man sich wieder überlegen, warum das überhaupt wohldefiniert, dazu muss man zeigen, dass auch diese induzierte Klasse unabhängig von der Wahl der Triangulierung von  $N$  und der Fortsetzung auf  $M$  ist. Im Wesentlichen will man dazu zeigen, dass sich beliebige zwei Triangulierungen zu einer weiteren Triangulierung verfeinern lassen, und dass Verfeinerungen von Triangulierungen die Homologiegruppen nicht beeinflussen. Auch das übersteigt unsere Möglichkeiten hier jedoch um Vieles und wir daher weggelassen.

Mit diesem Wissen im Hinterkopf widmen wir uns nun wieder den projektiven Räumen:

### 3.1.5 Bettizahlen

Als kleinen Abstecher (die folgenden Resultate sind für den Satz von Hopf irrelevant) wollen wir uns in diesem Abschnitt den *Bettizahlen* widmen, die auf natürliche Weise aus den Homologiegruppen hervorgehen, und uns eine etwas 'anschaulichere' Perspektive auf die Homologietheorie ermöglichen.

**Definition 3.20** (Betti-Zahl). Sei  $X$  ein topologischer Raum. Falls  $H_p(X)$  als  $\mathbb{F}_2$ -Vektorraum endlich-dimensional ist, so heißt

$$b_p(X) := \dim H_p(X).$$

die  $p$ -te **Bettizahl** von  $X$ .

**Beispiel 3.21** (Bettizahlen des Torus). Wir haben in **Beispiel 3.17** bereits die Homologiegruppen des Torus bestimmt. Aus der Definition folgt nun sofort:

$$b_0(T) = 1, \quad b_1(T) = 2, \quad b_2(T) = 1, \quad b_k(T) = 0.$$

Im Allgemeinen beschreibt  $b_0(T)$  die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten eines Raumes  $X$ ,  $b_0(T) = 1$  sagt also genau, dass der Torus wegzusammenhängend ist. Vergleiche hierzu auch die Argumentation bei

<sup>14</sup>z.B. eine abgeschlossene, differenzierbare Untermannigfaltigkeit.

**Beispiel 3.15**, wo wir uns das bereits (mehr oder weniger) allgemein überlegt haben.

$b_1(T) = 2$  interpretieren wir als die zwei eindimensionalen Löcher, die der Torus hatte, vgl. hierzu auch nochmal **Abbildung 3**, in der wir die beiden Schleifen, die die entsprechenden Löcher umrunden, anfangs diskutiert hatten.

$b_2(T) = 1$  sagt uns nun auch wie gewünscht, dass der Torus ein 'zweidimensionales' Loch besitzt.

### 3.1.6 Ausblick

Wir haben nun (grob) gesehen, wie sich mit der simplizialen Homologie einem Simplizialkomplex Vektorräume zuordnen lassen. Für eine allgemeine Homologietheorie müsste man noch wesentlich mehr Ergebnisse erarbeiten, man kann dann tatsächlich auch *jedem* topologischen Raum Homologiegruppen zuordnen (und diese stimmen bis auf die Koeffizientenwahl im Falle von Simplizialkomplexen mit unseren überein). Für Näheres sei beispielsweise auf [Hat02] verwiesen.

## 3.2 Singuläre Homologie

Will man sich von den 'lästigen' Simplizialkomplexen lösen, so hilft einem die singuläre Homologie.

**Definition 3.22.** Ein **singulärer  $n$ -Simplex** in  $X$  ist eine stetige Abbildung  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$ .

**Definition 3.23.** Für einen Raum  $X$  setze nun die singuläre Kettengruppe  $C_n(X)$  als die freie abelsche Gruppe, die von den singulären Simplexes in  $X$  erzeugt wird.

Alles weitere (Zyklen, Ränder, etc) definiert man wie auch im Fall der simplizialen Homologie.

- Als Vorteil hat man nun, dass homöomorphe Räume offensichtlich die gleichen Homologiegruppen besitzen, insbesondere, dass die Homologiegruppen nicht von der Wahl des Simplizialkomplexes abhängen.
- Andererseits werden die Kettengruppen nun **sehr** groß, meistens überabzählbar, weswegen es überhaupt nicht mehr klar ist, dass die Homologiegruppen endlich-dimensional sind, oder dass die Homologiegruppen höherer Ordnung als der Dimension von  $X$  trivial sind.

Für einen Simplizialkomplex können wir die simplizialen Homologiegruppen kanonisch in die singulären einbetten, indem wir ein Simplex auf seine charakteristische Einbettung schicken. Dadurch erhalten wir einen Homomorphismus von

den simplizialen Homologiegruppen eines Simplizialkomplexes in die singulären Homologiegruppen des zu Grunde liegenden topologischen Raums.

**Satz 3.24.** Für jeden Simplizialkomplex ist eben beschriebener Morphismus ein Isomorphismus.

### 3.3 Homotopieinvarianz

**Satz 3.25.** Für eine stetige Abbildung  $F: X \rightarrow Y$  gibt es eine Abbildung  $f_{\#}$  zwischen den korrespondierenden Homologiegruppen, d.h.

$$f_{\#}: C_n(X) \rightarrow C_n(Y).$$

für jedes  $n$ .

Ist  $f$  eine Homotopieäquivalenz, so ist  $f_{\#}$  ein Isomorphismus für jedes  $n$ .

Insbesondere haben Homotopieäquivalente Räume isomorphe Homologiegruppen.

### 3.4 Kohomologie

#### 3.4.1 Kohomologiegruppen

**Definition 3.26.** Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit, dann nennen wir den dualen Vektorraum zu  $H_q(X)$ ,

$$H^q(X) := \text{Hom}(H_q(X), \mathbb{F}_2).$$

die **Kohomologiegruppe** von  $X$  (mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2$ ).

Nur als Sanity Check: Das ist genau der zu  $H_q(X)$  *duale* Vektorraum, den wir auch aus der linearen Algebra kennen.

Analog zum ?? induziert eine stetige Abbildung  $f: X \rightarrow Y$  auch eine Abbildung zwischen den entsprechenden Kohomologiegruppen. Da es sich einfach um die zu  $f_*$  duale Abbildung (im Sinne der linearen Algebra und dualen Vektorräumen) handelt, dreht sich die Richtung der Abbildung um. Wir erhalten also:

**Definition 3.27** (Pullback). Sind  $X, Y$  Mannigfaltigkeiten und ist  $f: X \rightarrow Y$  stetig, so induziert  $f$  eine Abbildung

$$f^* : \begin{array}{ccc} H^q(Y) & \longrightarrow & H^q(X) \\ u & \longmapsto & u \circ f_* \end{array}$$

Auch diesem werden wir später nochmal begegnen.

### 3.4.2 Poincaré-Dualität

Dass Homologie und Kohomologie noch deutlich mehr miteinander zu tun haben als die jeweiligen Dualräume zu sein, stellte HENRI POINCARÉ 1893 fest<sup>15</sup>.

**Satz\* 3.28** (Poincaré-Dualität). Sei  $X$  eine kompakte Mannigfaltigkeit. Dann gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$D: H_{n-p}(X) \xrightarrow{\cong} H^p(X).$$

**Nebenbemerkung 3.29.** In der allgemeinen Fassung der Poincaré-Dualität findet sich noch die Forderung, dass  $X$  *orientierbar* (z.B. ist die Sphäre orientierbar; es gibt ein 'Innen' und 'Außen' der Oberfläche, das Möbiusband jedoch nicht) sein muss. Was das genau heißt, ist für uns unerheblich, da wir mit Koeffizienten in  $\mathbb{F}_2$  arbeiten, und dann jede Mannigfaltigkeit eine eindeutige 'Orientierung' besitzt.

### 3.4.3 Bettizahlen

Als kleinen Abstecher schauen wir uns hier wieder kurz die Bettizahlen an, die wir in [Unterunterabschnitt 3.1.5](#) bereits kennengelernt haben. Es ergibt<sup>16</sup> sich nämlich aus der Poincaré-Dualität unmittelbar:

**Korollar 3.30.** Ist  $X$  eine  $n$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, sodass die Bettizahlen  $b_p(X)$  endlich sind, so ist

$$b_p(X) = b_{n-p}(X).$$

*Beweis.* Nach Voraussetzung ist  $H_{n-p}(X)$  endlich-dimensional für jedes  $0 \leq p \leq n$ , denn die Bettizahlen sind genau die Dimensionen dieser Räume. Aus der linearen Algebra ist nun bekannt, dass

$$H_{n-p}(X) \cong \text{Hom}(H_{n-p}(X), \mathbb{F}_2) =: H^{n-p}(X).$$

indem wir zur Dualbasis übergehen (hier nutzen wir die endliche Dimension!). Aus der Poincaré-Dualität wissen wir jedoch, dass nun

$$H_{n-p}(X) \cong H^{n-p}(X) \cong H_p(X).$$

und anwenden der Dimension auf beiden Seiten liefert sofort

$$b_{n-p}(X) = \dim H_{n-p}(X) = \dim H_p(X) = b_p(X).$$

□

<sup>15</sup>Eine erste Fassung davon. Die moderne Formulierung entstand erst in den 1930ern durch ČECH und WHITNEY.

<sup>16</sup>Poincarés erste Formulierung war tatsächlich genau dieses Resultat.

## 4 Euler-Charakteristik

**Definition 4.1** (Euler-Charakteristik). Die **Euler-Charakteristik** eines topologischen Raums  $X$  ist definiert als die alternierende Summe der Betti-zahlen, d.h.

$$\chi(X) := \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i b_i(M).$$

- für den Fall, dass die  $b_i$  alle endlich und fast alle 0 sind.

**Definition 4.2** (Jordan-Kurve). Eine **Jordan-Kurve** ist das Bild einer stetigen, injektiven Einbettung  $S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ .

**Satz\* 4.3** (Jordanscher Kurvensatz). Sei  $C$  eine Jordankurve in  $\mathbb{R}^2$ . Dann hat das Komplement  $\mathbb{R}^2 \setminus C$  genau zwei Zusammenhangskomponenten. Eine dieser ist unbeschränkt, die andere beschränkt, und die Kurve  $C$  ist ihr gemeinsamer Rand. Beide Komponenten sind wegzusammenhängend und offen.

### 4.1 Versorgungsproblem

#### 4.1.1 Klassischer Ansatz

- Hier zunächst die klassische Euler-Formel beweisen, aber etwas genauer auf Jordan'schen Kurvensatz und die Ebene (z.B. versus Torus) eingehen.

*Beweis ( $K_{3,3}$  ist nicht planar).* Nimm an, dem sei so. Jede Fläche des Graphen hat mindestens 4 umlaufende Kanten, weil  $\geq 2$  und gerade, weil Kanten zwischen den beiden Hälften alternieren. Jede Kante wird so genau 2 mal gezählt, also folgt

$$4F \leq 2E.$$

Mit Euler erhalten wir nun aber:

$$V - E + F = 2 \quad \implies \quad 4 = 2V - 2E + 2F \leq 2V - 2E + E \quad \iff \quad E \leq 2V - 4.$$

Also folgt  $E \leq 2 \cdot 6 - 4 = 8$ , aber  $K_{3,3}$  hat 9 Kanten,  $\not\leq$ . □

- Zeigen, dass man den  $K_{3,3}$  allerdings auf dem Torus überschneidungsfrei einbetten kann.

**Satz 4.4** (Kuratowski). Ein Graph  $G$  ist genau dann planar, wenn er weder  $K_{3,3}$  noch  $K_5$  als Teilgraph besitzt.

*Beweis.* Wir wissen ähnlich wie vorher, dass

$$3F \leq 2E.$$

, aus der Eulerformel folgt aber mit  $V = 5$  und  $E = 10$ , dass  $F = 7$ , und das verletzt obige Ungleichung. die Umkehrung beweisen wir hier nicht.  $\square$

## 4.2 Krasses Versorgungsproblem

Gleiches Problem, aber jetzt mit dem  $K_{5,5}$

Können wir auf der Tasse mit einem Loch extra lösen.

### 4.2.1 Genus von Oberflächen und von Graphen einführen?

## 5 Löcher

### 5.1 Hose

Eine Hose hat 2 Löcher.

#### 5.1.1 Zusammenkleben von Beinen

Eine Hose mit zusammengeklebten Beinen ist homotopieäquivalent zur ursprünglichen Hose

### 5.2 T-Shirt

Ein T-Shirt hat 3 Löcher.

## 6 Der gekämmte Igel

### 6.1 Vektorfelder

- Vektorfelder einführen

**Satz 6.1.** Eine Vektorfeld  $v$  ohne Nullstellen existiert genau dann, wenn die Euler-Charakteristik von  $M$  verschwindet.

**Korollar 6.2.** Es sind genau die Sphären ungerader Dimension kämmbar.

## Bildquellen

- [Cmg] Cmglee. *utilities problem blank*. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3\\_utilities\\_problem\\_blank.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:3_utilities_problem_blank.svg).
- [Kri] Krishnavedala. *Homology cycles on a torus*. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torus\\_cycles.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torus_cycles.svg).
- [Leo] Leonid\_2. *Torus*. URL: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Torus.svg>.
- [Rok] RokerHRO. *Polar stereographic projections*. URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polar\\_stereographic\\_projections.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Polar_stereographic_projections.jpg).

## Literatur

- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002. ISBN: 0-521-79540-0. URL: <http://pi.math.cornell.edu/~hatcher/AT/AT.pdf>.
- [Jän01] Klaus Jänich. *Topologie*. Springer, 2001. ISBN: 978-3-540-41284-7. DOI: [10.1007/978-3-662-10575-7](https://doi.org/10.1007/978-3-662-10575-7).
- [Kas21] Daniel Kasproski. *Einführung in die Geometrie und Topologie*. Vorlesungsnotizen. 2021. URL: [https://kesslermaximilian.github.io/LectureNotesBonn/2021\\_Topologie.pdf](https://kesslermaximilian.github.io/LectureNotesBonn/2021_Topologie.pdf).
- [Mun18] James Munkres. *Topology (Classic Version)*. Pearson, 2018. ISBN: 978-0131816299.